

## ЛЕКЦИЯ 1.

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Соболевские пространства появились в работах С.Л. Соболева в 30-е годы. Его монография [1] вышла в 1950 г., потом была переиздана. Эти пространства оказались чрезвычайно удобными в различных отделах анализа, в особенности в уравнениях математической физики. Сейчас это отдельный раздел функционального анализа. По существу у Соболева уже было отчетливое понятие обобщенной функции.

Систематическую разработку теории обобщенных функций предпринял Лоран Шварц в 40-е годы, проанализировав множество достижений классиков анализа. Его монография [2] вышла в 1950 г., у нас распространялась ротационная копия. В Москве “бум” этой теории начался с работ И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова. Их первая книга [3] недавно переиздана.

Псевдодифференциальные операторы появились в 60-е годы, они оказались необходимыми при решении проблемы вычисления индекса общего эллиптического оператора, поставленной И.М. Гельфандом в 1960 г., а затем нашли применения ко многим другим задачам. Это синтез теории интегральных и дифференциальных операторов, содержащий исчисление символов.

По всем этим направлениям написано необозримое количество работ и много книг. “Бум” прошел, но остался новый язык и аппарат, позволившие продвинуться во многих задачах анализа, прежде всего в уравнениях в частных производных, см., например, [4]. Корифеи современной геометрии, живущие на Западе (такие, как Атья, Зингер, Гилмен и многие другие), прекрасно владеют этим аппаратом. В учебники он только начинает проникать, см., например, [5]. Но это пока не относится к псевдодифференциальным операторам.

1. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинградского университета, Л., 1950.

2. L Schwartz. Théorie des distributons. Hermann, Paris, 1950.

3. И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

4. Ю.В. Егоров и М.А. Шубин. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории. Итоги науки и техники, Совр. проблемы математики, Фунд. направления, т. 31. ВИНТИ, М., 1988. С. 6–125.

5. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. МЦНМО, М., 2001.

# I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Определение обобщенной функции (распределения).** Рассмотрим пространство  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  финитных бесконечно гладких функций (комплекснозначных). Это *основные функции* (потом введем другие пространства основных функций). Это пространство линейно. В нем можно ввести топологию, но пока, следуя И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову, ограничимся определением сходимости:  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  в этом пространстве, если существует такое  $A > 0$ , что все эти функции равны нулю при  $|x| > A$  и  $\partial^\alpha \varphi_j(x) \rightarrow \partial^\alpha \varphi(x)$  равномерно при любом  $\alpha$ . Здесь и дальше

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j.$$

**ЗАДАЧА 1.** Проверить полноту пространства  $\mathcal{D}$  относительно этой сходимости (проверить, что фундаментальная последовательность имеет предел).

Основные функции обычно будем обозначать буквами  $\varphi, \psi$ .

*Обобщенная функция*  $f$  (над  $\mathcal{D}$ ) – это линейный непрерывный функционал  $\langle f, \varphi \rangle$  над  $\mathcal{D}$ .

**ПРИМЕРЫ.** 1. *Дельта-функция*  $\delta(x - x_0)$ :

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0). \quad (1)$$

Это определение придает точный смысл известному физическому определению дельта-функции: это такая “функция”, равная 0 вне  $x_0$  и бесконечности в  $x_0$ , что всегда  $\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$ .

2. *Функционал типа функции, или регулярная обобщенная функция.* Пусть  $f(x) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Полагаем

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx \quad (2)$$

(интеграл по  $\mathbb{R}^n$ ).

Совокупность всех обобщенных функций над  $\mathcal{D}$  обозначается через  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Это линейное пространство с определением линейных операций

$$\langle \alpha f + \beta g, \varphi \rangle = \alpha \langle f, \varphi \rangle + \beta \langle g, \varphi \rangle. \quad (3)$$

**2. Дифференцирование обобщенной функции.** Сначала пусть  $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

$$\int \partial_j f(x) \varphi(x) dx = - \int f(x) \partial_j \varphi(x) dx$$

(проинтегрировали по частям). Принимая эту формулу за образец, полагаем для любой обобщенной функции  $f$

$$\langle \partial_j f, \varphi \rangle = - \langle f, \partial_j \varphi \rangle. \quad (4)$$

Очевидно, что это обобщенная функция.

Мы видим, что обобщенные функции дифференцируемы и, значит, бесконечно дифференцируемы:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (5)$$

при любом  $\alpha$ ; здесь и дальше  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

ПРИМЕРЫ. 1. Пусть для простоты  $n = 2$ . В анализе есть теорема:

$$\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2),$$

если эти частные производные непрерывны в рассматриваемой точке. *Для обобщенных функций всегда*

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f. \quad (6)$$

Действительно,

$$\langle \partial_1 \partial_2 f, \varphi \rangle = \langle f, \partial_2 \partial_1 \varphi \rangle = \langle f, \partial_1 \partial_2 \varphi \rangle = \langle \partial_2 \partial_1 f, \varphi \rangle.$$

Мы видим, что для обобщенных функций  $f$  порядок дифференцирования в  $\partial^\alpha$  безразличен.

2. Пусть  $f(x)$  – функция на прямой, гладкая вне точки  $x_0$ , имеющая в ней разные односторонние пределы  $f(x_0 \pm 0)$ . Тогда ее производная в смысле обобщенных функций – функционал типа функции  $f'(x)$  плюс  $h\delta(x - x_0)$ , где  $h$  – скачок  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ . Это проверяется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\ & \int_{-\infty}^{x_0} f'(x) \varphi(x) dx + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx + h \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Этот результат легко обобщается на случай кусочно-гладкой функции с несколькими точками скачков.

В частности, производная в смысле обобщенных функций от *функции Хевисайда*  $\theta(x)$ , равной 0 при  $x < 0$  и 1 при  $x > 0$ , равна  $\delta(x)$ .

3. Производные дельта-функции

$$\langle \partial^\alpha \delta(x - x_0), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0).$$

**3. Умножение на бесконечно гладкую функцию.** Пусть  $f \in D'$  и  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Если  $f$  – регулярная обобщенная функция, то и  $af$  – регулярная обобщенная функция и имеет место формула

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

В общем случае принимаем эту формулу за определение произведения  $af$ . Очевидно, что получается обобщенная функция.

Мы видим, что в  $D'$  действуют линейные дифференциальные операторы с бесконечно гладкими коэффициентами

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

ЗАДАЧА 2. Проверить формулу Лейбница

$$(af)' = a'f + af' \quad (n = 1, \quad a \in C^\infty, \quad f \in \mathcal{D}').$$

**4. Регуляризация функций с особенностями.** Рассмотрим этот вопрос пока на примере.

Рассмотрим обычную функцию  $1/x$ ,  $n = 1$ . Как сопоставить ей обобщенную функцию? Интеграл

$$\int \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

вообще говоря, расходится.

*1-й способ.* Используем главное значение интеграла (p.v. – principal value): полагаем

$$\langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi \rangle = v.p. \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Здесь вырезается симметричная окрестность особой точки. Этот предел существует и вычисляется следующим образом. Пусть  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| \geq A$ . Тогда он равен

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon < |x| < A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon < |x| < A} \frac{1}{x} dx \right] = \int_{|x| < A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

*2-й способ.* Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx.$$

Пусть снова  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| \geq A$ . Тогда этот предел равен

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + i\varepsilon} dx + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < A} \frac{dx}{x + i\varepsilon}.$$

Последний интеграл вычисляется как

$$\int_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon} \frac{1}{z} dz = \log z \Big|_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon} = i \arg z \Big|_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}$$

по формуле Ньютона–Лейбница. Здесь

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad |\arg z| \leq \pi.$$

В пределе получаем

$$\int_{-A}^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx - i\pi\varphi(0).$$

Эта обобщенная функция обозначается через  $\frac{1}{x+i0}$ . Таким образом,

$$\frac{1}{x+i0} = v.p. \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \quad (7)$$

**ЗАДАЧА 3.** Определить и вычислить обобщенную функцию  $\frac{1}{x-i0}$ .

**5. Предельный переход.** Сходимость в  $D'$  определяется как слабая сходимость:

$$f_j \rightarrow f, \text{ если } \langle f_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$$

для любой основной функции  $\varphi$ . Вместо индекса  $j$  тут может быть, скажем, индекс  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**ПРИМЕРЫ.** 1.  $v.p. \frac{1}{x}$  – предел функционалов типа функций  $f_\varepsilon$ , равных 0 при  $|x| < \varepsilon$  и  $1/x$  при  $|x| > \varepsilon$ .

2.

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x+i\varepsilon}$$

(под знаком предела – регулярные обобщенные функции).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если  $f_j \rightarrow f$ , то  $\partial^\alpha f_j \rightarrow \partial^\alpha f$ . (А в обычном анализе перестановка дифференцирования с предельным переходом требует дополнительных предположений.) Точно так же если  $f_j \rightarrow f$  и  $a$  – бесконечно гладкая функция, то  $a f_j \rightarrow a f$ . Это сразу видно из наших определений.

**6. Свертка обычных функций.** Это одна из важнейших операций в анализе; она обозначается звездочкой и определяется равенством

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y) dy. \quad (8)$$

Если  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ , то легко проверяется, что свертка этих функций принадлежит  $\mathcal{D}$ . Действительно, она финитна, а производные любого порядка вычисляются дифференцированием под знаком интеграла:

$$\partial^\alpha (\varphi * \psi)(x) = \int \partial^\alpha \varphi(x-y)\psi(y) dy,$$

т.е.

$$\partial^\alpha (\varphi * \psi) = (\partial^\alpha \varphi) * \psi. \quad (9)$$

Ясно, что все производные непрерывны.

Но можно рассматривать свертку и более общих функций. Например, если  $\varphi \in \mathcal{D}$ , а  $\psi$  – непрерывная функция, то свертка существует и принадлежит  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , а если  $\psi$  – финитная непрерывная функция, то свертка принадлежит  $\mathcal{D}$ . Проверьте это самостоятельно.

## ЛЕКЦИЯ 2.

Итак, мы рассматриваем свертку

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y) dy. \quad (1)$$

Она *коммутативна*:

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi. \quad (2)$$

Это легко проверяется при помощи замены переменных в интеграле (1):  $x-y = \tilde{x}$ .

СЛЕДСТВИЕ: если обе функции бесконечно гладкие и для простоты одна финитна, то

$$(\partial^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * (\partial^\alpha \psi). \quad (3)$$

Свертка, кроме того, *ассоциативна*:

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi) \quad (4)$$

(если для простоты хотя бы две из трех функций финитны), так что можно писать  $\varphi * \psi * \chi$ . Немного громоздкую проверку пока пропустим.

**7. Дельтаобразные последовательности.** Последовательность  $\{f_n\}$  обычных функций называется *дельтаобразной*, если соответствующие регулярные обобщенные функции стремятся к  $\delta(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Можно, конечно, говорить и о дельтаобразном семействе  $\{f_\varepsilon\}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Они часто полезны в анализе. Обсудим один из способов построения и построим дельтаобразное семейство основных функций.

Возьмем функцию  $\varphi_1 \in \mathcal{D}$  со следующими свойствами:

$$\varphi_1(x) \geq 0, \quad \varphi_1(x) = 0 \text{ при } |x| \geq 1, \quad \int \varphi_1(x) dx = 1. \quad (5)$$

Положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (6)$$

Очевидно, что  $\int \varphi_\varepsilon dx = 1$  и  $\varphi_\varepsilon(x) = 0$  при  $|x| \geq \varepsilon$ . Поэтому

$$\langle \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \int_{|x| \leq \varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) [\psi(x) - \psi(0)] dx + \psi(0)$$

стремится к  $\psi(0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Значит, (6) – дельтаобразное семейство.

**8. Носители обычных и обобщенных функций.** *Носителем*  $\text{supp } f$  непрерывной функции  $f(x)$  называется замыкание множества точек, в которых она отлична от нуля. Функция  $f(x)$  называется финитной, если ее носитель компактен. Линеал, состоящий из финитных непрерывных функций, обозначается через  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $f$  – обобщенная функция из  $D'(\mathbb{R}^n)$  и  $O$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Говорят, что  $f = 0$  в  $O$ , если  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  для всех основных функций с носителями в  $O$ . *Носителем*  $\text{supp } f$  обобщенной функции  $f$  называется наименьшее замкнутое множество, вне которого она равна нулю. Если  $f$  – функционал типа непрерывной функции, то это определение согласуется с предыдущим. Обобщенная функция с компактным носителем называется *финитной*.

Пример: носитель дельта-функции  $\delta(x - x_0)$  и любой ее производной – точка  $x_0$ . Говорят, что такие обобщенные функции *сосредоточены в точке*  $x_0$ .

Сформулируем две теоремы (они будут доказаны позднее).

**ТЕОРЕМА 1.** *Любая обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке  $x_0$ , является конечной линейной комбинацией дельта-функции  $\delta(x - x_0)$  и ее производных:*

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - x_0). \quad (7)$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Любая финитная обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в смысле обобщенных функций от финитных непрерывных функций:*

$$f = \sum_{|\alpha| \leq l} \partial^\alpha f_\alpha(x), \quad f_\alpha(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n). \quad (8)$$

Линеал, состоящий из финитных обобщенных функций, обозначается через  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Он *плотен в  $\mathcal{D}'$* , так как если  $\varphi$  – основная функция, равная 1 в окрестности начала, то любая обобщенная функция  $f$  есть предел произведений  $\varphi(x/m)f$  при  $m \rightarrow \infty$ .

**9. Свертка обобщенных функций.** Мы ограничимся определением свертки двух обобщенных функций, из которых хотя бы одна финитна.

Пусть сначала  $f(x)$  и  $g(x)$  – непрерывные функции,  $g(x)$  финитна. Тогда

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \iint f(x - y)g(y) dy \varphi(x) dx.$$

Заменим  $x - y$  на  $\tilde{x}$  и затем  $\tilde{x}$  на  $x$ . Меняя порядок интегрирования (по соответствующей теореме из анализа или по теореме Фубини), получаем, что правая часть равна

$$\int f(x) \int g(y) \varphi(x + y) dy dx,$$

т.е.

$$\langle (f * g)(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle. \quad (9)$$

Справа во внутренних угловых скобках  $g(y)$  действует на  $\varphi(x + y)$  как на функцию от  $y$ ;  $x$  играет роль параметра. Получается основная функция от  $x$  (проверьте), на нее и действует  $f(x)$  во внешних угловых скобках.

Пусть теперь  $f \in \mathcal{D}'$ ,  $g \in \mathcal{E}'$ . Принимая последнюю формулу за образец, полагаем

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x + y) \rangle_y \rangle_x. \quad (10)$$

Индексы справа указывают, по каким переменным действуют обобщенные функции  $g$  и  $f$ . Внутренние угловые скобки определяют основную функцию от  $x$ . Это видно из теоремы 2: если

$$g = \sum_{|\beta| \leq m} \partial^\beta g_\beta(x), \quad g_\beta(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n), \quad (11)$$

то

$$\langle g, \varphi(x+y) \rangle_y = \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \int g_\beta(y) \partial^\beta \varphi(x+y) dy.$$

Конечно, если и  $f$  финитна, то в (10) можно поменять  $f$  и  $g$  ролями. Получается одно и то же (с использованием (8) и (11)):

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \iint f(x) g(y) \partial^{\alpha+\beta} \varphi(x+y) dx dy. \quad (12)$$

**ПРИМЕР.**  $f * \delta(x) = f$  для любой обобщенной функции  $f$ .

Действительно,  $\langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle_y = \varphi(x)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Пусть  $K$  – компакт в  $\mathbb{R}^n$  и мы хотим рассматривать свертку  $f * g$  только на основных функциях  $\varphi(x)$  с носителями в  $K$ . Тогда носители основных функций  $\langle g, \varphi(x+y) \rangle_y$  тоже лежат в некотором компакте  $K_1$ . Это позволяет заменить  $f$  на  $\psi f$ , где  $\psi$  – основная функция, равная 1 в окрестности компакта  $K_1$ . Поэтому часто удобно считать, что в свертке  $f * g$  финитны и  $f$ , и  $g$ .

Отметим следующие свойства свертки, для простоты пока предполагая, что рассматриваемые обобщенные функции финитны.

1. *Коммутативность:*  $f * g = g * f$ . Она уже проверена.
2. *Формула для производных:*  $\partial^\gamma (f * g) = (\partial^\gamma f) * g = f * (\partial^\gamma g)$ .
3. *Ассоциативность*  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ; можно писать  $f * g * h$ .
4. *Непрерывность:* если  $f_n \rightarrow f$ , то  $f_n * g \rightarrow f * g$  (ограничимся эти утверждением).
5. Если  $f \in \mathcal{E}'$  и  $g \in \mathcal{D}$ , то  $f * g \in \mathcal{D}$ .

Наметим доказательство. Утверждение 2 проверяется при помощи формулы (12). Утверждение 3 проверяется при помощи формулы типа (12) для сверток  $(f * g) * h$  и  $f * (g * h)$ . Например, если все три обобщенные функции финитны и непрерывны, то

$$\langle (f * g) * h, \varphi \rangle = \iiint f(x) g(y) h(z) \varphi(x+y+z) dx dy dz = \langle f * (g * h), \varphi \rangle.$$

Этим мы проверили и (4) для финитных непрерывных функций. Утверждение 4 следует из определения (10). Утверждение 5 проверьте самостоятельно, используя утверждение 2 и формулу (8).

ТЕОРЕМА. Пространство  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathcal{D}'$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $\mathcal{E}'$  плотно в  $\mathcal{D}'$ , то достаточно проверить, что  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathcal{E}'$ . Если  $f \in \mathcal{E}'$ , то возьмем дельтаобразную последовательность  $\varphi_j(x)$  основных функций (см. п. 7); имеем (см. свойства свертки 4 и 5)

$$f * \varphi_j \rightarrow f * \delta(x) = f,$$

и здесь  $f * \varphi_j \in \mathcal{D}$ .  $\square$

**10. Решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.** Рассмотрим сначала уравнение

$$Lu(x) =: u^{(m)} + a_1(x)u^{(m-1)} + \dots + a_m(x)u = f(x) \quad (13)$$

с бесконечно гладкими коэффициентами и бесконечно гладкой правой частью.

**Теорема.** Любое решение уравнения (13) в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  является обычным бесконечно гладким решением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (13) сначала сводится к однородному уравнению (вычитанием частного решения, которое существует на всей оси и является бесконечно гладким). Затем однородное уравнение известным образом сводится к системе 1-го порядка

$$U'(x) = A(x)U(x) \quad (14)$$

с бесконечно гладкой матрицей  $A(x)$ . Достаточно проверить, что ее обобщенные решения являются обычными бесконечно гладкими решениями. Пусть  $\Phi(x)$  – фундаментальная матрица этой системы. Она существует и является невырожденной и бесконечно гладкой на всей оси. Положим  $U = \Phi(x)V$ . Для  $V$  получается уравнение  $V' = 0$ . Осталось показать, что любое решение скалярного уравнения  $v' = 0$  в  $\mathcal{D}'$  – постоянная.

Пусть  $\varphi_0$  – фиксированная функция из  $\mathcal{D}$  с  $\int \varphi_0 dx = 1$ . Тогда любую функцию  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$  можно представить в виде

$$\varphi = \psi + h\varphi_0, \quad \text{где } h = \int \varphi dx \text{ и } \int \psi dx = 0.$$

Функция  $\psi$  определяется написанным равенством. Это производная от функции

$$\int_{-\infty}^x \psi(t) dt,$$

принадлежащей  $\mathcal{D}$ . Поэтому

$$\langle v, \psi \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle v, \varphi \rangle = hC,$$

где  $C = \langle v, \varphi_0 \rangle$ . С другой стороны,

$$\langle C, \varphi \rangle = C \int \psi dx + hC \int \varphi_0 dx = hC.$$

Мы видим, что  $v = C$ .  $\square$

## ЛЕКЦИЯ 3.

Определим более общие пространства основных и обобщенных функций. Пусть  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ . Положим

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \quad (1)$$

это пространство бесконечно гладких функций в  $\Omega$  с компактными носителями (лежащими внутри  $\Omega$ ). Как и в случае  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , это линейное пространство, и сходимость в нем определяется так:  $\varphi_j \rightarrow \varphi$ , если носители всех этих функций лежат в фиксированном компакте  $K \subset \Omega$  и на нем  $\partial^\alpha \varphi_j(x) \rightarrow \partial^\alpha \varphi(x)$  равномерно при любом  $\alpha$ . Пространство  $\mathcal{D}'(\Omega)$  определим как состоящее из всех линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{D}(\Omega)$ . В этом пространстве, как и в случае  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , есть дифференцирование, умножение на бесконечно гладкие функции (определенные в  $\Omega$ ) и сходимость (слабая).

В частности, если  $n = 1$ , то можно взять  $\Omega = (a, b)$ . Теорема о том, что все решения обыкновенного дифференциального уравнения с бесконечно гладкими коэффициентами и правой частью являются обычными бесконечно гладкими решениями, распространяется на случай интервала  $(a, b)$  вместо оси, доказательство сохраняется.

В случае дифференциального оператора с переменными коэффициентами будем писать  $L = L(x, \partial)$ , в случае оператора с постоянными коэффициентами  $L = L(\partial)$ . Здесь  $\partial = d/dx$ .

Теперь рассмотрим оператор с постоянными коэффициентами:

$$Lu(x) = L(\partial)u(x) := u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \dots + a_m u. \quad (2)$$

Определим *фундаментальное решение уравнения*  $Lu = 0$  как такую функцию  $\mathcal{E}(x)$ , что  $L\mathcal{E}(x) = \delta(x)$  в смысле обобщенных функций на оси. (Тут традиционная не вполне правильная терминология; Г.Е. Шилов пытался говорить “фундаментальная функция оператора  $L$ ”. Но классики говорили “фундаментальное решение уравнения  $Lu = 0$ ” еще до появления обобщенных функций. В каком смысле, увидим.)

Сейчас мы укажем способ построения фундаментального решения и покажем, что это функционал типа функции.

Первая идея состоит в том, чтобы положить  $\mathcal{E}(x) = u_1(x)$  при  $x > 0$ ,  $u_2(x)$  при  $x < 0$ , где  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  – два решения однородного уравнения  $Lu = 0$ , они определены на всей оси (это линейные комбинации функций из фундаментальной системы решений). Но фундаментальное решение определено, конечно, с точностью до прибавления решения однородного уравнения. Поэтому из него можно вычесть  $u_1(x)$ . Теперь будем искать фундаментальное решение в виде функции

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)u(x), \quad (3)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда и  $u(x)$  – (бесконечно гладкое) решение уравнения  $Lu = 0$  на оси. Сейчас мы увидим, что дело сводится к подбору данных Коши для  $u(x)$  в точке 0.

Дифференцируя кусочно-гладкую функцию  $\mathcal{E}(x)$  в смысле обобщенных функций (см. п. 2), получаем

$$\mathcal{E}'(x) = \delta(x)u(0) + \theta(x)u'(x).$$

Положим  $u(0) = 0$ , чтобы при следующем дифференцировании не появилась производная дельта-функции. Теперь

$$\mathcal{E}''(x) = \delta(x)u'(x) + \theta(x)u''(x).$$

Если  $m$  велико, мы положим  $u'(0) = 0$ . И т. д. Окончательно полагаем

$$u(0) = \dots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u^{(m-1)}(0) = 1, \quad (4)$$

этим исчерпывается возможность выбора данных Коши. Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(x) &= \delta(x)u^{(m-1)}(0) + \theta(x)[u^{(m)}(x) + a_1u^{(m-1)}(x) + \dots + a_mu(x)] \\ &= \delta(x) + \theta(x)Lu(x) = \delta(x), \end{aligned}$$

что и требовалось. Фундаментальное решение построено, это бесконечно гладкая вне начала функция, ее производные в нуле до порядка  $m - 2$  непрерывны, а производная порядка  $m - 1$  имеет скачок.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Обобщенная функция  $f$  называется *бесконечно гладкой в области*  $O \subset \mathbb{R}^n$ , если она действует как функционал типа бесконечно гладкой функции  $f(x)$  на основные функции с носителями в  $O$ . *Сингулярным носителем* обобщенной функции  $f$  называется наименьшее замкнутое множество, вне которого эта функция является бесконечно гладкой. Обозначение:  $\text{sing supp } f$ .

Например, сингулярный носитель дельта-функции  $\delta(x - x_0)$  и любой ее производной – точка  $x_0$ . Сингулярный носитель только что построенного фундаментального решения – начало координат.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu = f \quad (5)$$

с постоянными коэффициентами. Справа – обычная или обобщенная функция для простоты с компактным носителем. Надо научиться строить частное решение; общее решение получается прибавлением обычного бесконечно гладкого решения однородного уравнения. Это легко:

$$u_0 = \mathcal{E}(x) * f \quad (6)$$

– *частное решение уравнения (5)*, так как

$$Lu_0 = (L\mathcal{E}(x)) * f = \delta(x) * f = f.$$

Мы видим, в частности, что построение фундаментального решения и вычисление свертки (6) заменяет процедуру вариации произвольных постоянных (разница на самом деле невелика).

Отметим, что классики определяли фундаментальное решение уравнения  $Lu = 0$  как такую функцию  $\mathcal{E}(x)$ , что для уравнения  $Lu = f(x)$  (справа обычная функция) формула

$$u_0(x) = \int \mathcal{E}(x-y)f(y) dy$$

дает частное решение.

Фундаментальное решение можно определить и для уравнения с переменными коэффициентами. Это такая обобщенная функция  $\mathcal{E}(x, y)$  по  $x$ , зависящая от параметра  $y$ , что

$$L(x, \partial_x) \mathcal{E}(x, y) = \delta(x - y).$$

Его можно строить, если известна фундаментальная система решений однородного уравнения. Подумайте, как.

**11. Другие пространства обычных и обобщенных функций.** Вот список пространств, которые нужны дальше.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \text{ и } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \text{ и } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) & \text{ и } \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{D}(\Omega) & \text{ и } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \mathcal{E}(\Omega) & \text{ и } \mathcal{E}'(\Omega), \\ \mathcal{D}(K) & \text{ и } \mathcal{D}'(K). \end{aligned}$$

Мы сейчас определим те из этих пространств, которые еще не встречались. Все эти пространства линейны. Пространства в первых трех строчках связаны следующими включениями:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \quad (7)$$

*Пространство  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  – это пространство Лорана Шварца быстро убывающих бесконечно гладких функций.* Оно состоит из таких бесконечно гладких функций  $\varphi(x)$ , что все произведения  $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$  ограничены (каждое своей постоянной). В нем можно ввести последовательность норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha|+|\beta| \leq m; x} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Сходимость в этом пространстве определяется так:  $\varphi_j \rightarrow \varphi$ , если  $\|\varphi_j - \varphi\|_m \rightarrow 0$  при всех  $m$ .

*Пространство  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (тоже Шварца) состоит из линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ; Шварц их назвал умеренными распределениями.*

Этому пространству принадлежит функционал типа локально интегрируемой функции  $g(x)$ , удовлетворяющей неравенству вида

$$|g(x)| \leq C(1 + |x|)^N \quad (9)$$

при каком-нибудь натуральном  $N$ . Такие функции называют *медленно растущими*.

В пространстве  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  определены дифференцирование и умножение на бесконечно гладкую функцию, у которой каждая производная есть функция медленного роста (проверьте), и (слабая) сходимость.

Будет доказана

**Теорема.** *Общий вид обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{S}'$  – это производная некоторого порядка в смысле обобщенных функций от непрерывной функции умеренного роста:*

$$f = \partial^\alpha g(x),$$

где непрерывная функция  $g(x)$  удовлетворяет неравенству вида (9).

Пространство  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$  состоит из всех бесконечно гладких функций. Сходимость в нем определяется как равномерная сходимость со всеми производными на любом компакте  $K \subset \mathbb{R}^n$ :  $\varphi_j \rightarrow \varphi$ , если  $\partial^\alpha \varphi_j(x) \rightarrow \partial^\alpha \varphi(x)$  равномерно на любом компакте при любом  $\alpha$ . Можно определить *полунормы*, например, следующим образом:

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha| \leq m-1, |x| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Полунорма отличается от нормы тем, что из ее равенства нулю на данной функции не следует, что эта функция равна нулю. Ясно, что  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  в этом пространстве, если  $\|\varphi_j - \varphi\|_m \rightarrow 0$  при всех  $m$ .

Пространство  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  – это уже знакомое нам пространство обобщенных функций с компактными носителями. Нам предстоит показать, что оно совпадает с пространством линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{E}$ . Это потребует некоторой подготовки.

В этом пространстве определены дифференцирование, умножение на бесконечно гладкую функцию и (слабая) сходимость.

Пространство  $\mathcal{E}(\Omega)$  – это бесконечно гладкие функции в области  $\Omega$ . Сходимость – равномерная со всеми производными на компактах, лежащих внутри  $\Omega$ . В частности, полунормы можно определить при помощи компактов

$$\{x \in \Omega : |x| \leq m, \rho(x, \partial\Omega) \geq 1/m\}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где  $\rho(x, \partial\Omega)$  – расстояние от точки  $x$  до границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Выпишите эти полунормы.

Пространство  $\mathcal{D}(K)$  состоит из всех функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , носители которых содержатся в заданном компакте  $K$ . (Вместо  $\mathbb{R}^n$  можно взять область  $\Omega$ , содержащую  $K$ .) Естественные нормы в  $\mathcal{D}(K)$  – это

$$\|\varphi\|_{m,K} = \max_{|\alpha| \leq m; x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Наконец, пространство  $\mathcal{D}'(K)$  состоит из линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{D}(K)$ .

Всеми этими пространствами пользовался Лоран Шварц. Есть много других полезных пространств обобщенных функций, они обычно придумываются под рассматриваемые задачи.

Обратим внимание на то, что все вложения в (7) являются *непрерывными*: сходимость последовательности сохраняется при переходе в более широкое пространство. Кроме того, пространство  $\mathcal{D}$  *плотно* в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$ . Действительно, если  $\psi(x)$  – функция из  $\mathcal{S}$  или  $\mathcal{E}$ , а  $\varphi(x)$  – функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 в окрестности начала, то  $\varphi(x/j)\psi(x) \rightarrow \psi(x)$  соответственно в  $\mathcal{S}$  или  $\mathcal{E}$ . Проверьте это. Проверьте также полноту пространств  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$ .

## ЛЕКЦИЯ 4.

**12. Счетно-нормированные пространства.** Пространства  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}(K)$  являются счетно-нормированными. Приведем общее определение счетно-нормированного пространства. Рассматривается линейное пространство  $X$  элементов  $x, y, \dots$ . На нем введена счетная последовательность полунорм  $p_m(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  (или норм). Полунорма  $p(x)$  – это неотрицательная функция со свойствами

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{и} \quad p(\lambda x) = |\lambda|p(x). \quad (1)$$

Кроме того, потребуем, чтобы из равенств  $p_m(x) = 0$  при всех  $m$  следовало, что  $x = 0$ . Сходимость  $x_j \rightarrow x$  в этом пространстве определяется так:

$$p_m(x_j - x) \rightarrow 0 \quad \text{при всех } m.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что последовательность полунорм монотонна:  $p_m(x) \leq p_{m+1}(x)$  при всех  $x$  из  $m$ . (Действительно,  $p_m$  можно заменить на  $p_1 + \dots + p_m$  при всех  $m$ .) Будем считать, что это условие выполнено.

Счетно-нормированное пространство можно превратить в *топологическое пространство*, определив окрестности точек следующим образом:

$$O_{m,\varepsilon}(x) = \{y : p_m(x - y) < \varepsilon\} \quad (2)$$

( $\varepsilon > 0$ ). Это пространство *хаусдорфово*: любые две точки имеют непересекающиеся окрестности. Действительно, если  $p_m(x - y) = \delta > 0$  при каком-нибудь  $m$ , то достаточно взять  $O_{m,\delta/2}(x)$  и  $O_{m,\delta/2}(y)$ .

Далее, это пространство *метризуемо*: метрику (расстояние) вводим формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}. \quad (3)$$

Аксиомы метрики легко проверяются: эта функция неотрицательна, равна нулю тогда и только тогда, когда  $x = y$ , симметрична, т.е.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ , и удовлетворяет неравенству треугольника (последнее проверьте сами). Метрика инвариантна относительно сдвигов:  $\rho(x - y) = \rho(x - z, y - z)$ . Сходимость  $x_j \rightarrow x$ , определенная выше, равносильна сходимости в этом метрическом пространстве. Действительно, справедливо неравенство

$$\rho(x, y) \leq p_m(x - y) \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < p_m(x - y) + \frac{1}{2^m}; \quad (4)$$

из него легко следует, что из сходимости по полунормам следует сходимость по метрике. Обратное утверждение следует из неравенства

$$\frac{p_m(x - y)}{1 + p_m(x - y)} \leq 2^m \rho(x, y) \quad (5)$$

при любом  $m$ . Действительно, из него вытекает, что

$$\text{если } 2^m \rho(x, y) < \varepsilon < 1/2, \quad \text{то } p_m(x - y) \leq \varepsilon / (1 - \varepsilon) < 2\varepsilon. \quad (6)$$

Пусть теперь  $f(x)$  – функционал (числовая функция) на счетно-нормированном пространстве  $X$ . Его непрерывность в точке  $y$  можно определить двумя способами. 1) По  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  при  $\rho(x, y) < \delta$ . 2)  $f(x_j) \rightarrow f(y)$  для любой последовательности  $x_j$ , сходящейся к  $y$ . Эквивалентность этих определений проверяется в точности так же, как в обычном курсе анализа. Это общий факт для функционалов на метрических пространствах. Функционал называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке. Если функционал линеен, то поскольку расстояние инвариантно относительно сдвигов, непрерывность следует из непрерывности в одной точке, например, в нуле.

Следующая теорема будет для нас очень полезна.

**Теорема 1.** *Непрерывность линейного функционала  $f(x)$  равносильна его ограниченности по какой-нибудь из полунорм: найдутся такие  $m$  и  $C > 0$ , что*

$$|f(x)| \leq Cp_m(x). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на неравенстве (4) и утверждении (6). Пусть выполнено условие (7); проверим, что наш функционал стремится к 0 при  $\rho(x, 0) \rightarrow 0$ . Зададим  $\varepsilon > 0$  и предположим, что  $2^m \rho(x, 0) \leq \delta < 1/2$ . Тогда в силу (6)  $p_m(x) < 2\delta$ . Поэтому если дополнительно  $2C\delta < \varepsilon$ , то из (7) следует, что  $|f(x)| < \varepsilon$ .

Пусть теперь функционал  $f(x)$  стремится к 0 при  $\rho(x, 0) \rightarrow 0$ . Тогда, в частности, по  $\varepsilon = 1$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из  $\rho(x, 0) < \delta$  следует  $|f(x)| \leq 1$ . Согласно (4) имеем при любом  $m$

$$\rho(x, 0) < p_m(x) + \frac{1}{2^m}.$$

Выберем  $m$  так, что  $1/(2^m) < \delta/2$ . Тогда из  $p_m(x) < \delta/2$  следует  $|f(x)| < 1$ . Теперь от противного проверяется, что если  $p_m(x) > 0$ , то

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta} p_m(x),$$

так как  $f$  и  $p_m$  при замене  $x$  на  $\lambda x$  умножаются на  $|\lambda|$ . Если же  $p_m(x) = 0$ , то из аналогичных соображений получается, что  $f(x) = 0$ . Таким образом, неравенство (7) получается с постоянной  $C = 2/\delta$ .  $\square$

**Теорема 2.** *Пространство линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{E}$  совпадает с пространством обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$  с компактными носителями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $f$  – линейный непрерывный функционал над  $\mathcal{E}$ . Тогда в силу теоремы 1

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m, |x| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

где  $m$  и  $C$  не зависят от  $\varphi$ . Отсюда следует, что  $\langle f, \varphi \rangle = 0$ , если носитель функции  $\varphi$  не имеет общих точек, скажем, с шаром радиуса  $m + 1$  с центром в начале. Значит,  $f$  имеет компактный носитель. Конечно, этот носитель может быть частью последнего шара.

Обратно, пусть  $f$  – обобщенная функция из  $\mathcal{D}'$  с компактным носителем и  $\psi$  – функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 в окрестности этого компакта. Тогда

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \psi \varphi \rangle$$

на функциях  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Но по этой формуле  $f$  продолжается до линейного непрерывного функционала на  $\mathcal{E}$ . Именно в смысле возможности продолжения и надо понимать соответствующую часть утверждения теоремы.  $\square$

**13. Первая встреча с соболевским пространством  $H^m(\Omega)$ .** Пусть  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , например, все  $\mathbb{R}^n$ , и  $m$  – целое неотрицательное число. Рассмотрим линейал в  $C^m(\Omega)$ , состоящий из функций, для которых конечна норма, определяемая равенством

$$\|u\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \quad (8)$$

Это линейное пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx. \quad (9)$$

Оно неполно. Его пополнение по норме (8) называется *соболевским пространством  $H^m(\Omega)$* . Другое обозначение:  $W_2^m(\Omega)$ . При  $m = 0$  это обычное  $L_2(\Omega)$ .

Мы откладываем на будущее подробное рассмотрение этого и более общих соболевских пространств. Пока они нам нужны только для того, чтобы доказать теорему 2 из п. 8 об общем виде обобщенной функции с компактным носителем (доказательство будет проведено в п. 14).

Отметим следующее. Если при пополнении появляется элемент  $u$  как предел обычных гладких функций  $u_k(x)$  по норме, определенной в (8), то это, конечно, функция из  $L_2(\Omega)$ :  $u = u(x)$ . Производные  $\partial^\alpha u_k(x)$  порядков  $|\alpha| \leq m$  тоже имеют пределы в  $L_2(\Omega)$ , мы их обозначим через  $\partial^\alpha u(x)$  и назовем *обобщенными производными* функции  $u(x)$  порядка  $\alpha$  в смысле С.Л. Соболева. В дальнейшем мы увидим, что это производные в смысле обобщенных функций! Норма в (8) и скалярное произведение (9) сохраняют смысл для всех элементов пространства  $H^m(\Omega)$ . Это, следовательно, гильбертово пространство.

Если  $H$  – гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle$ , то согласно теореме Ф. Рисса общий вид линейного непрерывного функционала  $f(u)$  над  $H$  выражается формулой  $f(u) = (u, w)$ , где  $w$  – фиксированный элемент из  $H$ . Отсюда следует, что *общий вид линейного непрерывного функционала  $f(u)$  над пространством  $H^m(\Omega)$  выражается формулой*

$$f(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) w_\alpha(x) dx, \quad (10)$$

где  $w_\alpha(x)$  – некоторые фиксированные функции из  $L_2(\Omega)$ .

Будем для простоты считать, что область  $\Omega$  или совпадает с  $\mathbb{R}^n$ , или совпадает с полупространством, или ограничена и имеет гладкую (класса  $C^\infty$ ) границу.

Позднее будет доказана теорема вложения, принадлежащая С.Л. Соболеву:

**Теорема.** При  $m > n/2$  пространство  $H^m(\Omega)$  непрерывно вложено в пространство  $C^0(\bar{\Omega})$  в следующем смысле: каждый элемент  $u(x)$  пространства  $H^m(\Omega)$  – непрерывная функция (быть может, после исправления на множестве нулевой меры), удовлетворяющая неравенству

$$|u(x)| \leq C \|u\|_{m,\Omega}, \quad (11)$$

где постоянная  $C$  зависит только от области  $\Omega$ . Если  $m > N + n/2$ , где  $N$  – натуральное число, то в аналогичном смысле пространство  $H^m(\Omega)$  непрерывно вложено в пространство  $C^N(\bar{\Omega})$ , при этом справедливо неравенство

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq C_N \|u\|_{m,\Omega} \quad (|\alpha| \leq N). \quad (12)$$

**14. Структура обобщенных функций с компактными носителями.** Сначала мы выясним структуру обобщенных функций из  $\mathcal{D}(K)$ , где

$$K = K_a = \{x : |x_j| \leq a, \quad j = 1, \dots, n\}, \quad (13)$$

$a$  – положительное число. Будем называть это множество кубом. Можно рассмотреть и значительно более общие компакты.

В пространстве  $D_K$  у нас введена система норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha| \leq m; x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (14)$$

Введем вторую систему – соболевских норм

$$\|\varphi\|'_m = \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \quad (15)$$

где  $m$  также пробегает все целые неотрицательные числа, а  $\Omega$  – внутренность куба  $K$ .

Эти две системы эквивалентны в следующем смысле: для каждого  $m$  найдутся такие  $m'$  и  $C_m$ , что  $\|\varphi\|_m \leq C_m \|\varphi\|'_{m'}$ , и наоборот. Действительно, очевидно, что

$$\|\varphi\|'_m \leq C'_m \|\varphi\|_m,$$

где  $C'_m$  легко выражается через объем куба  $K$  и  $m$ . В обратную сторону утверждение следует из приведенной выше теоремы вложения.

Поэтому сходимость в  $\mathcal{D}(K)$  можно определять при помощи соболевских норм (15). Пусть  $f(\varphi)$  – линейный непрерывный функционал над  $\mathcal{D}(K)$ . Согласно теореме 1 в п. 12 он ограничен по некоторой соболевской норме:

$$|f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|'_m. \quad (16)$$

Тогда он непрерывно продолжается (с сохранением этого неравенства) на замыкание линейала  $\mathcal{D}(K)$  в  $H^m(\Omega)$ . Это не все соболевское пространство  $H^m(\Omega)$  (увидим это позже), а некоторое (замкнутое) подпространство в нем. Но по теореме Хана–Банаха наш функционал продолжается теперь до линейного непрерывного функционала на всем пространстве  $H^m(\Omega)$ .

Выше мы отметили, как выглядит такой функционал. Существуют такие функции  $w_\alpha(x) \in L_2(\Omega)$ , что

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} w_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx. \quad (17)$$

Этим мы показали, что *каждая обобщенная функция из  $\mathcal{D}(K)$  – это конечная сумма производных в смысле обобщенных функций от функций, принадлежащих  $L_2(\Omega)$ .*

Этот результат мы упростим при помощи интегрирования по частям.

Так как функции  $w_\alpha(x)$  принадлежат  $L_2(\Omega)$ , то они суммируемы – принадлежат  $L_1(\Omega)$ .

Пусть  $g(t)$  и  $h(t)$  – суммируемые функции одного переменного на отрезке  $[c, d]$ . Положим

$$G(t) = \int_c^t g(\tau) d\tau, \quad H(t) = \int_c^t h(\tau) d\tau \quad (c \leq t \leq d). \quad (18)$$

Известно, что это абсолютно непрерывные функции и что почти всюду  $G'(t) = g(t)$ ,  $H'(t) = h(t)$ . При этом справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_c^d G(t)h(t) dt + \int_c^d g(t)H(t) dt = G(d)H(d) - G(c)H(c). \quad (19)$$

См., например, С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, 1949, стр. 159.

Это позволяет преобразовать интегралы

$$\int_{\Omega} w_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx$$

следующим образом. Считая, что этот интеграл записан в виде повторных интегралов по  $x_1, \dots, x_{n-1}$  от интеграла по  $x_n$ , преобразуем последний интегрированием по частям: при почти всех  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$  функцию  $w_\alpha(x', x_n)$  заменим ее интегралом по последнему переменному от  $-a$  до  $x_n$ , а функцию  $\partial^\alpha \varphi(x', x_n)$  продифференцируем по этому переменному. Затем, пользуясь теоремой Фубини, поменяем местами интегралы по двум последним переменным

и повторим операцию уже по переменному  $x_{n-1}$ . И т.д. В результате функция  $w_\alpha(x)$  заменится непрерывной функцией, а порядок дифференцирования функции  $\varphi$  повысится на единицу по каждому переменному.

Затем можно выровнять все порядки дифференцирования – заменить их наибольшими.

Мы получили следующий результат. *Любая обобщенная функция из  $\mathcal{D}'(K)$  является функционалом типа производной некоторого порядка от функции, непрерывной в  $K$ . Очевидно, что и наоборот, такой функционал является обобщенной функцией из  $\mathcal{D}(K)$ . Значит, мы полностью описали  $\mathcal{D}(K)$ .*

Теперь рассмотрим обобщенную функцию  $f$  из  $\mathcal{E}'$ . Мы уже знаем, что она имеет компактный носитель. Пусть  $\psi(x)$  – функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 в окрестности этого носителя. Тогда  $f = \psi f$ . Пусть  $a$  настолько велико, что носитель функции  $\psi$  содержится в  $K_a$ . Тогда достаточно выяснить, как  $f$  действует на основные функции из  $\mathcal{D}(K)$ . Но это мы уже знаем: как производная некоторого порядка  $\alpha$  в смысле обобщенных функций от некоторой непрерывной функции  $g(x)$  на  $K$ .

Таким образом,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_K g(x) \partial^\alpha [\psi(x) \varphi(x)] dx. \quad (20)$$

Здесь мы можем произвольно продолжить функцию  $g(x)$  вне  $K_a$ . Продолжим ее так, чтобы получилась функция, непрерывная на  $\mathbb{R}^n$  и равная 0 вне  $K_{a+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Наконец, вычислим производную  $\partial^\alpha [\psi \varphi]$  по формуле Лейбница. Получим

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \sum f_\alpha(x) \partial^\beta \varphi(x) dx, \quad (21)$$

где сумма конечна и  $f_\alpha(x)$  – финитные непрерывные функции.

Обратно, каждый такой функционал на  $\mathcal{D}$  является обобщенной функцией с компактным носителем. Теорема 2 из п. 8 доказана.

## ЛЕКЦИЯ 5.

**15. Структура обобщенных функций, сосредоточенных в точке.**

Здесь мы докажем теорему 1 из п. 8.

Пусть  $f$  – обобщенная функция из  $\mathcal{D}'$ , сосредоточенная в нуле. В силу теоремы 1 из п. 12, найдутся такие  $C$ ,  $m$  и  $h$ , что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq m, |x| \leq h} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \quad (1)$$

Сопоставим функции  $\varphi$  набор значений ее производных в нуле до порядка  $m$ ; он называется *струей порядка  $m$*  этой функции в нуле:

$$j_m(\varphi, 0) = \{\partial^\alpha \varphi(0) : |\alpha| \leq m\} \quad (2)$$

(jet=струя). Покажем, что

$$j_m(\varphi, 0) = 0 \Rightarrow \langle f, \varphi \rangle = 0. \quad (3)$$

Отсюда будет следовать, что  $\langle f, \varphi \rangle$  можно рассматривать как линейный непрерывный функционал на конечномерном линейном пространстве струй (2), а такой функционал, как известно, имеет вид конечной линейной комбинации  $\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0)$ . Итак, пусть  $j_m(\varphi, 0) = 0$ .

Пусть  $\psi(x)$  – функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 при  $|x| \leq 1/2$  и 0 при  $|x| \geq 1$ . Положим  $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x/\varepsilon)$ . Так как  $f$  сосредоточена в нуле, то

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \psi_\varepsilon \varphi \rangle \quad (4)$$

при любом  $\varepsilon > 0$ . Теперь достаточно показать, что здесь правая часть стремится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В силу (1) для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что при  $|\alpha| \leq m$

$$\max_x |\partial^\alpha [\psi_\varepsilon(x) \varphi(x)]| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (5)$$

По формуле Лейбница

$$\partial^\alpha [\psi_\varepsilon(x) \varphi(x)] = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} c_{\beta, \gamma} \partial^\beta \psi_\varepsilon(x) \cdot \partial^\gamma \varphi(x). \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \partial^\beta \psi_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-|\beta|} (\partial^\beta \psi)(x/\varepsilon), \\ \partial^\gamma \varphi(x) &= O(\varepsilon^{m+1-|\gamma|}) \quad \text{на } \text{supp } \psi_\varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому выражение (6) есть  $O(\varepsilon^{m+1-|\alpha|})$  равномерно по  $x$ , так что оно стремится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**16. Структура обобщенных функций из  $\mathcal{S}'$ .** Здесь мы докажем теорему из п. 12. Можно было бы ввести для этого соболевские пространства с весом, но это накладно; вместо этого мы воспользуемся теоремой об общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве  $L_1$  с весом. Этим же путем можно было бы доказывать утверждение о структуре обобщенной функции из  $\mathcal{D}(K_a)$  – рассматривать линейные непрерывные функционалы на пространстве  $L_1(K_a)$  без веса.

Удобно перейти в  $\mathcal{S}$  сначала к системе норм

$$p_m(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m; x} (1 + |x|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|. \quad (7)$$

Эта система норм эквивалентна следующей:

$$p'_m(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m} \int (1 + |x|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)| dx.$$

Действительно, так как  $(1 + |x|)^m = (1 + |x|)^{m+n+1} (1 + |x|)^{-n-1}$  и функция  $(1 + |x|)^{-n-1}$  суммируема, то

$$p'_m(\varphi) \leq C_m p_{m+n+1}(\varphi).$$

С другой стороны, если конечны все интегральные нормы  $p'_m(\varphi)$ , то  $(1 + |x|)^m \partial^\alpha(x)$  в любой точке можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \partial^{(1, \dots, 1)} [(1 + |y|)^m \partial^\alpha \varphi(y)] dy.$$

Это позволяет оценить каждую норму  $p_m(\varphi)$  через интегральные нормы подходящего большего порядка.

Пусть теперь  $f \in \mathcal{S}'$ . Согласно теореме 1 из п. 12 найдутся такие  $C$  и  $m$ , что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C p'_m(\varphi). \quad (8)$$

Теперь сопоставим функции  $\varphi$  вектор-функцию  $\{\partial^\alpha \varphi(x)\}$ , где  $|\alpha| \leq m$ . Эта вектор-функция лежит в векторном пространстве  $L_1(\mathbb{R}^n, (1 + |x|)^m)$  с весом  $(1 + |x|)^m$ . Если вес – единица, то, как известно, сопряженное пространство отождествляется с пространством  $L_\infty(\mathbb{R}^n)$  ограниченных измеримых функций, причем любой непрерывный линейный функционал над  $L_1(\mathbb{R}^n)$  имеет вид

$$f(\varphi) = \int g(x) \varphi(x) dx,$$

где  $g(x)$  – ограниченная измеримая функция. Аналогично обстоит дело в случае  $L_1$  с весом – см. Данфорд и Шварц, Линейные операторы, т. 1, стр.314. Продолжив наш функционал до ограниченного линейного функционала на векторном весовом пространстве  $L_1$ , получаем, что он реализуется в виде

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int (1 + |x|)^m g_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx,$$

где  $g_\alpha(x)$  – ограниченные измеримые функции. Очевидно, что

$$f_\alpha(x) = (1 + |x|)^m g_\alpha(x)$$

– измеримые функции умеренного роста. Так как производные  $\partial^\alpha \varphi(x)$  быстро убывают, то при помощи интегрирования по частям можно заменить функции  $g_\alpha(x)$  непрерывными функциями, а затем выровнять порядки производных. Интегрировать функции  $f_\alpha(x)$  по каждому переменному надо при этом от конечной точки, скажем, от нуля. Мы видим, что каждая обобщенная функция из  $\mathcal{S}'$  имеет структуру, указанную в формулировке теоремы. Обратно, функционал такой структуры всегда принадлежит к  $\mathcal{S}'$ .  $\square$

## II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБЫЧНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Преобразование Фурье на  $\mathcal{S}$ .** Преобразование Фурье функции  $u(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$  определяется формулой

$$u(x) \mapsto v(\xi) = (Fu)(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x) dx. \quad (9)$$

Здесь и дальше  $x \cdot \xi = \sum x_j \xi_j$ ;  $\xi_j$  пока вещественны. Так как модуль экспоненты под знаком интеграла – единица, то очевидно, что  $v(\xi)$  – ограниченная функция. (Можно показать, что она стремится к 0 на бесконечности.)

Мы сейчас будем рассматривать функции  $u = \varphi \in \mathcal{S}$ .

Положим

$$D_j = i^{-1} \partial_j = i^{-1} \partial / \partial x_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Интегрированием по частям легко проверяется формула

$$F[D_j \varphi] = \xi_j F[\varphi] \quad (10)$$

(именно по этой причине при использовании преобразования Фурье производные  $D_j$  удобнее, чем  $\partial_j$ ). Отсюда следует, что

$$F[D^\alpha \varphi] = \xi^\alpha F[\varphi] \quad (11)$$

при любом  $\alpha$ . Далее, рассмотрим линейный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha. \quad (12)$$

Из (11) следует, что

$$F[a(D)\varphi] = a(\xi)F[\varphi], \quad (13)$$

где функция

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \quad (14)$$

называется (полным) *символом* оператора  $a(D)$ . Например, символ оператора Лапласа  $\Delta$  (и главный символ, см. ниже) равен  $-|\xi|^2$ .

Отметим, что символ определяется и для операторов с переменными коэффициентами: если

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (15)$$

то (полным) *символом* этого оператора называется функция

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (16)$$

*Главный символ* того же оператора – старшая однородная часть символа:

$$a_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (17)$$

(вместо  $a_0$  часто пишут  $a_m$ ). Если главный символ не обращается в нуль при вещественных  $\xi \neq 0$ , то оператор называется *эллиптическим*.

Еще одна полезная формула получается из (9) дифференцированием по  $\xi_j$  под знаком интеграла:

$$D_j F[\varphi](\xi) = F[-x_j \varphi(x)]. \quad (18)$$

Из нее следует, что

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = F[(-1)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi(x)]. \quad (19)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$  и  $\psi(\xi) = F[\varphi(x)]$ . Тогда  $\psi \in \mathcal{S}$ .

Действительно, из (11) видно, что все  $\xi^\alpha \psi(\xi)$  – ограниченные функции, так что  $\psi(\xi)$  быстро убывает. Далее,  $\psi(\xi)$  непрерывна (это видно из определения преобразования Фурье) и имеет непрерывные производные любого порядка – см. (19), причем эти производные тоже быстро убывают.  $\square$

*Обратное преобразование Фурье* определяется на функциях из  $L_1(\mathbb{R}^n)$  формулой

$$v(\xi) \mapsto u(x) = F^{-1}[v(\xi)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} v(\xi) d\xi. \quad (20)$$

**Теорема 2.** На функциях из  $\mathcal{S}$  прямое и обратное преобразования Фурье взаимно обратны.

**Доказательство.** Пусть для простоты  $n = 1$ . Имеем, используя предельный переход под знаком интеграла и теорему Фубини,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} \int \varphi(y) e^{-iy\xi} dy d\xi &= \\ \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{ix\xi - \varepsilon|\xi|} \int \varphi(y) e^{-y\xi} dy d\xi &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi(y) \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(y-x)\xi - \varepsilon|\xi|} d\xi dy. & \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\int_0^\infty e^{-it\xi - \varepsilon\xi} d\xi = \frac{e^{-it\xi - \varepsilon\xi}}{-it - \varepsilon} \Big|_0^\infty = \frac{1}{it + \varepsilon},$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-it\xi + \varepsilon\xi} d\xi = \frac{e^{-it\xi + \varepsilon\xi}}{-it + \varepsilon} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{-it + \varepsilon}.$$

Сумма этих двух интегралов равна  $2\varepsilon/(\varepsilon^2 + t^2)$ . Если ее разделить на  $2\pi$  и проинтегрировать, получим 1. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(y) \frac{\varepsilon}{(y-x)^2 + \varepsilon^2} dy = \varphi(x). \quad (22)$$

Это проверяется очевидным образом: интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty |\varphi(y) - \varphi(x)| \frac{\varepsilon}{(y-x)^2 + \varepsilon^2} dy$$

разбивается в сумму интегралов по  $|y-x| < r$  и  $|y-x| > r$  с малым фиксированным  $r$ , в первом мал модуль разности  $|\varphi(y) - \varphi(x)|$ , второй стремится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

[Отметим, что фактически мы здесь имеем свертку функции  $\varphi$  с функциями, образующими дельтаобразное семейство:

$$\varphi(x) * \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Но формально здесь затруднительно сослаться на приготовленные раньше теоремы.]

То же самое получается, если написать преобразования в обратном порядке. На многомерный случай доказательство распространяется без труда.  $\square$

Более общая теорема обращения доказывается в курсе функционального анализа.

**Замечание.** Формулу (13) можно теперь переписать в виде

$$a(D) = F^{-1}a(\xi)F. \quad (23)$$

На операторы в частных производных с переменными коэффициентами эта формула обобщается так:

$$a(x, D) = F_{\xi \mapsto x}^{-1} a(x, \xi) F_{x \mapsto \xi}. \quad (24)$$

Позднее мы увидим, что псевдодифференциальный оператор в  $\mathbb{R}^n$  с символом  $a(x, \xi)$  определяется именно такой формулой. Но там символы уже не будут обязательно многочленами по  $\xi$ .

**Теорема 3.** Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$  и  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Уже показано, что

$$F[\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)] = \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n).$$

Легко проследить, что каждая норма функции в последнем пространстве оценивается через некоторые нормы ее прообраза Фурье в предыдущем пространстве. И наоборот.  $\square$

## ЛЕКЦИЯ 6.

**Теорема 4.** *Свертка двух функций из  $\mathcal{S}$  принадлежит  $\mathcal{S}$ . При преобразовании Фурье она переходит в произведение образов Фурье этих функций:*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение мы могли доказать раньше. Очевидно, что свертка двух функций из  $\mathcal{S}$

$$\int \varphi(x-y)\psi(y) dy$$

допускает дифференцирование под знаком интеграла любое число раз. Если ее умножить на  $|x|^N$ , то этот множитель можно оценить под знаком интеграла через  $(|x-y|+|y|)^N$ . Отсюда видно, что свертка и все ее производные быстро убывают.

Второе утверждение проверяется при помощи теоремы Фубини:

$$\int e^{-ix \cdot \xi} \int \varphi(x-y)\psi(y) dy dx = \int e^{-iy \cdot \xi} \psi(y) dy \int e^{-i(x-y) \cdot \xi} \varphi(x-y) dx.$$

Остается заменить под знаком внутреннего интеграла  $x-y$  на  $x$ .  $\square$

Отметим заодно следующее утверждение.

**Теорема 5.** *Свертка функции  $\varphi$  из  $\mathcal{S}$  с непрерывной медленно растущей функцией  $f(x)$  определена и является бесконечно гладкой медленно растущей функцией.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Записав эту свертку в виде

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y)f(y) dy,$$

можем неограниченно дифференцировать ее под знаком интеграла. Получаются непрерывные функции. Функция  $f(y)$  при больших  $|y|$  мажорируется выражением  $(|x-y|+|x|)^N$  при некотором  $N$ , и тогда свертка не может расти быстрее  $|x|^N$  на бесконечности.  $\square$

**2. Преобразование Фурье на пространстве  $\mathcal{S}'$ .** Если  $f(x)$  – функция из  $L_1(\mathbb{R}^n)$ , то ее преобразование Фурье определяет непрерывный линейный функционал над  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  по формуле

$$\begin{aligned} \langle F[f](\xi), \psi(\xi) \rangle &= \iint e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \psi(\xi) d\xi = \int f(x) \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi dx \\ &= \langle f(x), F[\psi](x) \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь второе равенство вытекает из теоремы Фубини. К  $\psi$  применяется не обратное, а прямое преобразование Фурье. Принимая эту формулу за образец, полагаем

$$\langle F[f], \psi \rangle = \langle f, F[\psi] \rangle \quad (f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)). \quad (2)$$

Автоматически получается следующий важный результат.

**Теорема 6.** Преобразование Фурье обобщенной функции из  $\mathcal{S}'$  – обобщенная функция из  $\mathcal{S}'$ . Более того, отображение  $f \mapsto F[f]$  – непрерывный в обе стороны изоморфизм пространства  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$  на пространство  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n)$ .

Обратное преобразование Фурье определяется для обобщенных функций, конечно, формулой

$$\langle F^{-1}[g], \varphi \rangle = \langle g, F^{-1}[\varphi] \rangle \quad (g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)). \quad (3)$$

**ПРИМЕР 1.** Преобразование Фурье дельта-функции – единица. Немного более общий результат:

$$F[\delta(x-y)] = e^{-iy \cdot \xi}. \quad (4)$$

Действительно,

$$\langle \delta(x-y), \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi \rangle = \int e^{-iy \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi.$$

**ПРИМЕР 2.** Справедлива формула

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \langle F[1], \psi \rangle &= \langle 1, F[\psi] \rangle = \int dx \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{iy \cdot \xi} dx \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi \Big|_{y=0}, \end{aligned}$$

что равно  $(2\pi)^n \psi(0)$  в силу формулы обращения преобразования Фурье.

**ЗАДАЧИ.** 1. Найдите преобразование Фурье от экспоненты  $e^{ih \cdot x}$  ( $h$  – вещественный вектор).

2. Найдите преобразование Фурье функции Хевисайда  $\theta(x)$ . Указание: используйте формулу

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \theta(x) e^{-\varepsilon x}.$$

Ответ:  $-i/(\xi - i0)$ .

**Теорема 7.** Для обобщенных функций  $f$  из  $\mathcal{S}'$

$$F[D_j f] = \xi_j F[f]. \quad (6)$$

Действительно, пусть  $\psi(\xi) \in \mathcal{S}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle F[D_j f], \psi \rangle &= \langle D_j f, F[\psi] \rangle = -\langle f, D_j \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi \rangle = \\ &= \langle f, \int e^{-ix \cdot \xi} \xi_j \psi(\xi) d\xi \rangle = \langle f, F[\xi_j \psi(\xi)] \rangle = \\ &= \langle F[f], \xi_j \psi(\xi) \rangle = \langle \xi_j F[f], \psi \rangle. \end{aligned}$$

**Следствие.** Если  $a(D)$  – оператор в частных производных с постоянными коэффициентами, то для обобщенных функций  $f$  из  $\mathcal{S}'$

$$a(D)f = F^{-1}a(\xi)Ff. \quad (7)$$

### 3. Преобразования Фурье обобщенных функций с компактными носителями.

Если  $f(x)$  – непрерывная или хотя бы суммируемая функция с компактным носителем, то ее обычное преобразование Фурье можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, так что это бесконечно гладкая ограниченная функция. Более того, оно аналитически продолжается до целой аналитической функции

$$g(\zeta) = \int e^{-ix\zeta} f(x) dx, \quad \zeta = \xi + i\tau.$$

Можно также отметить, что его можно рассматривать как результат действия функции  $f(x)$  на экспоненту  $e^{-ix\cdot\xi}$  как функцию из  $\mathcal{E}$ , зависящую от  $\xi$  как от параметра:

$$\int e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx = \langle f(x), e^{-ix\cdot\xi} \rangle. \quad (8)$$

Эти наблюдения легко обобщаются на обобщенные функции с компактными носителями:

**Теорема 1.** Пусть  $f \in \mathcal{E}'$ . Тогда  $F[f]$  – медленно растущая бесконечно гладкая функция, допускающая продолжение до целой аналитической функции. При этом справедлива формула

$$F[f] = \langle f, e^{-ix\cdot\xi} \rangle. \quad (9)$$

Действительно, достаточно рассмотреть случай  $f = D^\alpha f_\alpha(x)$ , где  $f_\alpha(x)$  – финитная непрерывная функция. В силу теоремы 7 из предыдущего пункта в этом случае

$$F[f] = \xi^\alpha F[f_\alpha(x)] = \xi^\alpha \int e^{-ix\cdot\xi} f_\alpha(x) dx$$

– медленно растущая бесконечно гладкая функция, и она продолжается до целой аналитической функции. Ее можно записать в виде

$$F[f] = \langle f_\alpha(x), \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \rangle = \langle f_\alpha(x), (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi} \rangle = \langle D^\alpha f_\alpha(x), e^{-ix\cdot\xi} \rangle.$$

чем и заканчивается доказательство.  $\square$

### 4. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций.

**Теорема 1.** Пусть  $f$  и  $g$  – обобщенные функции соответственно из  $\mathcal{S}'$  и  $\mathcal{E}'$ . Тогда свертка  $f * g$  принадлежит  $\mathcal{S}'$  и

$$F[f * g] = F[f]F[g]. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда  $g = \partial^\alpha g_\alpha(x)$ , где  $g_\alpha(x)$  – финитная непрерывная функция.

Пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \langle f(x), \langle \partial^\alpha g_\alpha(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x), \int g_\alpha(y) \partial^\alpha \varphi(x+y) dy \rangle. \end{aligned}$$

Здесь интеграл по  $y$  можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, и получающиеся интегралы быстро убывают (умножив такой интеграл на  $|x|^N$ , можно оценить этот множитель под знаком интеграла через  $(|x+y| + |y|)^N$ ). Значит,  $f$  действует на основную функцию из  $\mathcal{S}$ , так что  $f * g$  – линейный непрерывный функционал над  $\mathcal{S}$ .

Далее,

$$\langle F[f * g], \psi \rangle = \langle f * g, F[\psi] \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \int \psi(\xi) e^{-i(x+y)\cdot\xi} d\xi \rangle \rangle. \quad (11)$$

Здесь выражение во внутренних угловых скобках равно

$$\begin{aligned} \int g_\alpha(y) (-1)^\alpha D_y^\alpha \int \psi(\xi) e^{-i(x+y)\cdot\xi} d\xi dy &= \int \left[ \int g_\alpha(y) e^{-iy\cdot\xi} dy \right] \xi^\alpha \psi(\xi) e^{-ix\cdot\xi} d\xi = \\ &= \int F[g_\alpha](\xi) \xi^\alpha \psi(\xi) e^{-ix\cdot\xi} d\xi = F[F[g](\xi) \psi(\xi)]. \end{aligned}$$

Поэтому выражение (11) можно переписать в виде

$$\langle f, F[F[g](\xi) \psi(\xi)] \rangle = \langle F[f], F[g] \psi \rangle = \langle F[f] F[g], \psi \rangle,$$

что и доказывает наше утверждение.  $\square$

**5. Преобразование Фурье на  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$ .** Пусть  $\varphi$  – функция из  $\mathcal{D}$ . Ее преобразование Фурье

$$\psi(\xi) = \int \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \quad (12)$$

продолжается до целой аналитической функции

$$\psi(\zeta) = \int \varphi(x) e^{-ix\cdot\zeta} dx. \quad (13)$$

Пусть  $a = (a_1, \dots, a_n)$  – вектор из положительных чисел, положим

$$K_a = \{x : |x_j| \leq a_j, j = 1, \dots, n\} \quad (14)$$

и будем называть это множество бруском (раньше мы рассматривали куб с одинаковыми  $a_j$ ). Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(K_a)$ , т.е. это основная функция с носителем в  $K_a$ . Тогда при всех натуральных  $N$  справедливы оценки

$$|\zeta|^N |\psi(\zeta)| \leq C_N e^{\sum_{j=1}^n a_j |\tau_j|}. \quad (15)$$

(Действительно, умножение интеграла (13) на  $\zeta_j$  равносильно его дифференцированию по  $x_j$ , а производная перебрасывается с экспоненты на  $\varphi(x)$  интегрированием по частям.) В частности, функция  $\psi(\zeta)$  быстро убывает при  $|\tau_j| \leq \text{const}$ ,  $\xi \rightarrow \infty$  и является целой функцией экспоненциального типа. (Целая аналитическая функция  $F(z)$  называется функцией экспоненциального типа, если справедливо неравенство  $|F(x)| \leq c_1 e^{c_2 |z|}$ .)

Введем *пространство*  $\mathcal{Z}_a$ , оно будет состоять из целых аналитических функций  $\psi(\zeta)$  с оценками (15).

**Теорема 1.** *Обратное преобразование Фурье функции  $\psi \in \mathcal{Z}_a$  принадлежит  $\mathcal{D}(K_a)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для простоты пусть  $n = 1$ . Запишем формулу Коши для  $\psi(\xi)$ :

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(z)}{z - \xi} dz,$$

где контур  $C$  охватывает точку  $\xi$ . Будем считать, что это окружность радиуса 1. Этот интеграл можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, и легко проверить, что все производные быстро убывают (если написать  $|\xi|^N$  перед продифференцированным любое число раз интегралом, то этот множитель можно оценить через  $(|\xi - z| + |z|)^N$  под знаком интеграла.) Поэтому  $\psi \in \mathcal{S}$  и, значит, преобраз Фурье этой функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (16)$$

принадлежит  $\mathcal{S}$ . Осталось показать, что функция  $\varphi(x)$  равна 0 нулю вне  $K_a$ . Это делается подходящим сдвигом линии интегрирования в (16), возможным в силу оценок (15). Например, пусть  $x > a$ . Тогда переписываем (16) в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\xi + i\tau) e^{ix(\xi + i\tau)} d\xi.$$

При положительном  $\tau$  подинтегральное выражение не превосходит по модулю

$$C(1 + |\xi|)^{-2} e^{(a-x)\tau},$$

так что интеграл стремится к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Поэтому  $\varphi(x) = 0$ .

Обобщение на многомерный случай получается без труда.  $\square$

*Замечание.* По существу мы доказали вариант теоремы Пэли–Винера, в которой описаны преобразования Фурье функции из  $L_2(\mathbb{R})$ , равной 0 вне отрезка. (Оно принадлежит  $L_2$  и продолжается до целой функции экспоненциального типа.) Другой вариант можно было бы добавить к п. 3. Преобразование Фурье обобщенной функции с носителем, лежащим в  $K_a$ , – это целая функция  $g(\zeta)$  с оценкой вида

$$|g(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{\sum_1^n a_j |\tau_j|} \quad (17)$$

с фиксированным  $N$ .

В пространстве  $\mathcal{Z}_a$  назовем последовательность функций  $\{\psi_n\}$  *сходящейся*, если их преобразы Фурье образуют сходящуюся последовательность в  $\mathcal{D}(K_a)$ . Теперь преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между  $\mathcal{D}(K_a)$  и  $\mathcal{Z}_a$ .

## ЛЕКЦИЯ 7.

Наконец, введем *пространство*  $\mathcal{Z}$  – объединение пространств  $\mathcal{Z}_a$  по всем  $a$ . Это пространство преобразований Фурье всех функций из  $\mathcal{D}$ . Последовательность функций  $\{\psi_j\}$  в  $\mathcal{Z}$  назовем *сходящейся*, если она принадлежит  $\mathcal{Z}_a$  при некотором  $a$  и там сходится. Получаем:

**Теорема 2.** *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{Z}$ .*

Теперь введем *пространство*  $\mathcal{Z}'$  линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{Z}$  и определим *преобразование Фурье обобщенной функции*  $f$  из  $\mathcal{D}'$  формулой

$$\langle F[f], \psi \rangle = \langle f, F[\psi] \rangle \quad (\psi \in \mathcal{Z}), \quad (1)$$

аналогичной формуле для преобразования Фурье обобщенной функции из  $\mathcal{S}'$ . Сразу получается

**Теорема 3.** *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{Z}'$ .*

Эти определения и теоремы принадлежат И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову. Лоран Шварц рассматривал преобразования Фурье на  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{S}'$ .

**Задачи.** Перенесите на обобщенные функции  $f$  из  $\mathcal{D}'$  формулу для  $F[D_j f]$ , формулу для  $a(D)f$  и теорему о преобразовании Фурье свертки с обобщенной функцией из  $\mathcal{E}'$  из лекции 6.

Следует отметить, что функционалы из  $\mathcal{Z}'$  могут определяться интегралами по контурам в комплексной плоскости. Гельфанд и Шиллов назвали такие функционалы *аналитическими*. Например, дельта-функция оказывается аналитическим функционалом:

$$\langle \delta(\zeta - \zeta_0), \psi(\zeta) \rangle = \psi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (2)$$

где контур охватывает точку  $\zeta_0$ .

Умножение на функцию  $h(\zeta)$  определено в  $\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{Z}'$ , если это целая аналитическая функция, удовлетворяющая неравенствам вида (17) из лекции 6. Запишите определение умножения в  $\mathcal{Z}'$ .

Пусть для простоты  $n = 1$ . Заметим, что для функции  $\psi(\zeta)$  из  $\mathcal{Z}$  *тейлоровское разложение*

$$\psi(\zeta - z) = \sum_0^\infty \psi^{(k)}(\zeta) \frac{(-1)^k z^k}{k!} \quad (3)$$

*справедливо в смысле сходимости в этом пространстве.* Это следует из того, что двойственное разложение в  $\mathcal{D}$

$$\sum_0^\infty (ix)^k \frac{z^k}{k!} \varphi(x) = e^{ixz} \varphi(x)$$

сходится в  $\mathcal{D}$  (так как тейлоровский ряд для экспоненты сходится равномерно на любом компакте и то же верно после почленного дифференцирования).

Отсюда мы сейчас выведем, что *обобщенные функции из  $\mathcal{Z}'$  не только бесконечно дифференцируемы, но и аналитичны – разложимы в ряды Тейлора.* Это означает следующее. Определим *сдвиг*  $g(\zeta + z)$  обобщенной функции  $g = g(\zeta)$  формулой

$$\langle g(\zeta + z), \psi(\zeta) \rangle = \langle g(\zeta), \psi(\zeta - z) \rangle. \quad (4)$$

(Такое определение полезно и в применении к обобщенным функциям из  $\mathcal{S}'$  или  $\mathcal{D}'$ , напишите его.) *Утверждается, что*

$$g(\zeta + z) = \sum_0^\infty g^{(k)}(\zeta) \frac{z^k}{k!} \quad (5)$$

в смысле сходимости в  $\mathcal{Z}'$ . Действительно,

$$\langle g(\zeta + z), \psi(\zeta) \rangle = \langle g(\zeta), \psi(\zeta - z) \rangle = \sum_0^\infty \langle g(\zeta), \frac{(-1)^k z^k}{k!} \psi^{(k)}(\zeta) \rangle,$$

так как ряд Тейлора функции  $\psi \in \mathcal{Z}$ , как отмечено выше, сходится к ней в  $\mathcal{Z}$ . Отсюда получаем (5) в  $\mathcal{Z}'$ .

Эти замечания легко обобщаются на многомерный случай.

### III. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**1. Фундаментальные решения уравнений с постоянными коэффициентами.** Рассмотрим общее уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D)u(x) = 0. \quad (6)$$

Его *фундаментальным решением* мы называли такую обобщенную функцию  $\mathcal{E}$ , что

$$a(D)\mathcal{E} = \delta(x). \quad (7)$$

Оно определено с точностью до прибавления любого решения однородного уравнения (6).

**Теорема 1.** *Фундаментальное решение существует для любого  $a(D)$ . Более того, существует фундаментальное решение, принадлежащее  $\mathcal{S}'$ .*

Первое утверждение доказали Мальгранж и независимо Эренпрайс (1953-4). Хёрмандер (не опубликовано) и Трев (1956) дали конструктивное доказательство. (Позднее мы его разберем.) Более трудное второе утверждение доказали Лояшевич и независимо Хёрмандер (1958). (B. Malgrange, L. Ehrenpreis, L. Hörmander, F. Trèves, S. Łojasiewicz.)

Теперь приведем простые, но важные утверждения.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{E}$  – фундаментальное решение уравнения (6), и пусть  $f$  – обобщенная функция с компактным носителем. Тогда свертка

$$u = \mathcal{E} * f \quad (8)$$

является частным решением неоднородного уравнения

$$a(D)u = f. \quad (9)$$

Действительно,

$$a(D)[\mathcal{E} * f] = [a(D)\mathcal{E}] * f = \delta(x) * f = f.$$

Здесь, однако, надо пояснить следующее. Перебрасывание производных с одного сомножителя в свертке на другой отмечено у нас в случае, когда они оба – обобщенные функции с компактным носителем. Однако если только один из них имеет компактный носитель, то можно использовать следующий стандартный прием. Рассмотрим свертку на основных функциях с носителями в фиксированной ограниченной области. Тогда сомножитель с некомпактным носителем можно, не меняя свертки, умножить на финитную бесконечно гладкую функцию, равную 1 в шаре достаточно большого радиуса. Поэтому последняя выкладка корректна.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $u(x)$  – решение уравнения (9) из  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , и пусть  $\mathcal{E}$  – фундаментальное решение уравнения (6). Тогда  $u$  выражается формулой (8).

Действительно,

$$u = \delta(x) * u = a(D)\mathcal{E} * u = \mathcal{E} * a(D)u = \mathcal{E} * f.$$

**Теорема 4.** Фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (10)$$

в  $\mathbb{R}^n$  имеет вид

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}} \text{ при } n > 2, \quad \mathcal{E}_2(x) = c_2 \log |x|, \quad (11)$$

где  $c_n$  – некоторые постоянные.

Доказательство и вычисление постоянных  $c_n$  немного отложим. Обратим внимание на то, что это локально интегрируемые функции, бесконечно гладкие вне начала координат. При всех  $n$  сингулярный носитель – начало координат.

**ЗАДАЧА.** Постройте фундаментальное решение для  $n = 1$ , т.е. для уравнения  $u'' = 0$ . См. лекцию 3.

Мы продолжим изучение и использование фундаментальных решений в дальнейших пунктах. До этого в п. 2 устраним небольшие недоработки, оставшиеся у нас при изучении свертки.

## 2. Еще две теоремы о свертке.

**Теорема 1.** *Свертка  $h_1 * h_2$  – бесконечно гладкая функция, если либо  $h_1 \in \mathcal{D}'$ ,  $h_2 \in \mathcal{D}$ , либо  $h_1 \in \mathcal{E}$ ,  $h_2 \in \mathcal{E}'$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Запишем определение свертки

$$\langle (h_1 * h_2), \varphi \rangle = \langle h_1(x), \langle h_2(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

Докажем первое утверждение. Снова фиксируя ограниченную область, в которой находится носитель функции  $\varphi$ , можем предположить, что  $h_1$  имеет компактный носитель. Тогда достаточно рассмотреть случай, в котором  $h_1 = \partial^\alpha \tilde{h}_1(x)$ , где  $\tilde{h}_1(x)$  – финитная непрерывная функция. В этом случае

$$h_1 * h_2 = \partial^\alpha \int \tilde{h}_1(y) h_2(x-y) dy$$

– производная в смысле обобщенных функций. Но легко видеть, что интеграл – бесконечно гладкая финитная функция. Поэтому производную можно рассматривать в обычном смысле.

Второе утверждение проверяется аналогично; убедитесь в этом самостоятельно.  $\square$

**Теорема 2.** *Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Тогда*

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g, \quad (12)$$

$$\text{sing supp}(f * g) \subset \text{sing supp } f + \text{sing supp } g. \quad (13)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обе формулы следуют из определения свертки

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (14)$$

Проверим первую. Возьмем сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$ . Пусть бесконечно гладкие функции  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  равны 1 в  $\varepsilon/4$ -окрестностях носителей обобщенных функций  $f$  и  $g$  соответственно и нулю вне  $\varepsilon/2$ -окрестностей. Тогда в написанной формуле можно заменить  $f$  на  $\psi_1(x)f$  и  $g$  на  $\psi_2(y)g$ . Эти множители можно перенести к  $\varphi(x+y)$ . Если теперь  $\varphi$  равна нулю в  $\varepsilon$ -окрестности суммы  $\text{supp } f + \text{supp } g$ , то  $\psi_1(x)\psi_2(y)\varphi(x+y) = 0$ .

Проверим вторую. Для любого  $\varepsilon > 0$  сделаем такое разбиение:

$$f = f_1 + f_2, \quad g = g_1 + g_2,$$

где  $f_1$  и  $g_1$  равны нулю вне  $\varepsilon/2$ -окрестностей сингулярных носителей обобщенных функций  $f$  и  $g$ , а вторые слагаемые – бесконечно гладкие функции, причем  $g_2$  имеет компактный носитель. Имеем

$$f * g = f_1 * g_1 + f_2 * g_1 + f_1 * g_2 + f_2 * g_2.$$

Здесь носитель свертки  $f_1 * g_1$  находится в  $\varepsilon$ -окрестности суммы сингулярных носителей обобщенных функций  $f$  и  $g$ . Остальные слагаемые – бесконечно гладкие в силу теоремы 1.  $\square$

**3. Гипоэллиптические операторы.** Очевидно, что если  $u$  – обобщенная функция, то

$$\operatorname{supp} a(D)u \subset \operatorname{supp} u \quad \text{и} \quad \operatorname{sing\,supp} a(D)u \subset \operatorname{sing\,supp} u. \quad (15)$$

Оператор  $a(D)$  называется *гипоэллиптическим*, если всегда

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} a(D)u, \quad (16)$$

иначе говоря, если решение уравнения  $a(D)u = f$  всегда является бесконечно гладким в области, в которой  $f$  – бесконечно гладкая функция. Можно говорить и о гипоэллиптическом уравнении.

**Теорема 1.** *Для того чтобы оператор  $a(D)$  был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальное решение  $\mathcal{E}$  уравнения  $a(D)u = 0$  было бесконечно гладким вне начала координат.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Необходимость очевидна, так как  $a(D)\mathcal{E} = \delta(x)$ . Докажем достаточность. Пусть  $a(D)u = f$  в  $\mathbb{R}^n$  и  $f \in C^\infty$  в области  $\Omega$ . Зафиксируем точку  $x_0 \in \Omega$  и докажем, что она не принадлежит сингулярному носителю решения. Возьмем функцию  $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , равную 1 вблизи  $x_0$  и нулю вне окрестности, лежащей внутри  $\Omega$ . Имеем  $a(D)[\psi u] = f_1$ , где  $f_1 = f$  вблизи  $x_0$ , так что  $x_0$  не принадлежит  $\operatorname{sing\,supp} f_1$ . Далее,  $u = \mathcal{E} * f_1$  по теореме 3 из п. 1 и  $\operatorname{sing\,supp}[\psi u] \subset \operatorname{sing\,supp} f_1$  по теореме 2 из п. 2. Значит,  $x_0$  не принадлежит  $\operatorname{sing\,supp} u$ .  $\square$

В частности, уравнение Лапласа гипоэллиплично.

Существуют алгебраические критерии гипоэллиптичности (по свойствам многочлена  $a(\xi)$ ). Один из них состоит в следующем:

**Теорема 2.** *Оператор  $a(D)$  гипоэллиптивен тогда и только тогда, когда расстояние  $d(\xi)$  от точки  $\xi \in \mathbb{R}^n$  до поверхности  $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : a(\zeta) = 0\}$  стремится к бесконечности при  $\xi \rightarrow \infty$ .*

На доказательстве останавливаться не будем. Это доказательство и другие критерии можно найти, например, в книге Л. Хёрмандера "Линейные дифференциальные операторы с частными производными", М., Мир, 1965.

В частности, эллиптические операторы (т. е. операторы  $a(D)$  с отличным от 0 при  $\xi \neq 0$  главным символом  $a_0(\xi)$ ) гипоэллиптивны.

**ЗАДАЧА.** Выведите это из только что приведенного критерия гипоэллиптичности.

Мы *докажем* гипоэллиптичность эллиптических уравнений позднее даже при переменных (бесконечно гладких) коэффициентах средствами исчисления псевдодифференциальных операторов.

На самом деле решения эллиптических уравнений  $a(D)u = f$  *аналитически гипоэллиптивны*: если для каждой точки некоторой области правая часть уравнения разлагается в ряд Тейлора по степеням расстояния от этой точки, то то же верно для решения. Обратное утверждение тоже справедливо: из аналитической гипоэллиптичности уравнения  $a(D)u = 0$  вытекает его эллиптичность. Это теорема И.Г. Петровского (доказанная им для уравнений с аналитическими коэффициентами).

## ЛЕКЦИЯ 8.

**4. Транспонированный оператор. Замена переменных.** Этот и следующий пункты содержат полезный технический материал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $L$  и  ${}^tL$  – два непрерывных оператора на пространстве основных функций  $\mathcal{X}$ , связанные формулой

$$\langle L\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, {}^tL\varphi \rangle \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{X}). \quad (1)$$

Тогда оператор  ${}^tL$  называется *транспонированным* к  $L$ . Пусть теперь оператор  $L$  продолжен до непрерывного оператора на пространстве обобщенных функций  $\mathcal{X}'$  по формуле

$$\langle Lf, \varphi \rangle = \langle f, {}^tL\varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{X}'). \quad (2)$$

Тогда по-прежнему  ${}^tL$  называется оператором, транспонированным к  $L$ .

ПРИМЕРЫ:

- 1) Оператор дифференцирования:  $L = D^\alpha$ ,  ${}^tL = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$ .
- 2) Оператор умножения на функцию:  $L = a(x) \cdot = {}^tL$ .
- 3) Линейный оператор в частных производных:

$$L = a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad {}^tL = {}^ta(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a_\alpha(x) \cdot].$$

- 4) Преобразование Фурье:  $L = F = {}^tL$ .

Уточните сами предположения об  $a(x)$  в примере 2 в зависимости от пространства  $\mathcal{X}$ , о коэффициентах в примере 3) и о пространствах в примере 4.

- 5) Оператор сдвига  $Lf(x) = f(x - x_0)$ ,  ${}^tL\varphi(x) = \varphi(x + x_0)$ .

Например,  $\delta(x - x_0)$  является сдвигом обобщенной функции  $\delta(x)$ :

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + x_0) \rangle. \quad (3)$$

6) Можно рассмотреть более общие обратимые гладкие замены переменных. Пусть задан диффеоморфизм  $\chi : x \mapsto y = y(x)$  области  $\Omega_1$  на область  $\Omega_2$ , и пусть  $\psi(y)$  – функция на  $\Omega_2$ . Формула

$$(\chi^* \psi)(x) = \psi(\chi(x)) = \psi(y(x)) \quad (4)$$

определяет отображения

$$C^\infty(\Omega_2) \rightarrow C^\infty(\Omega_1), \quad L_{1,\text{loc}}(\Omega_2) \rightarrow L_{1,\text{loc}}(\Omega_1), \quad \mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_1). \quad (5)$$

Чтобы продолжить  $\chi^*$  до отображения  $\mathcal{D}'(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , найдем транспонированный оператор. Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ . Тогда

$$\int \psi(y(x)) \varphi(x) dx = \int \psi(y) \varphi(x(y)) |\det \partial x / \partial y| dy,$$

где  $x = x(y)$  – обратный к  $\chi$  диффеоморфизм области  $\Omega_2$  на область  $\Omega_1$  и справа появился модуль определителя Якоби. Таким образом,

$$({}^t\chi^*)(\varphi(x)) = \varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|. \quad (6)$$

Для обобщенных функций  $f$  положим

$$\langle \chi^* f, \varphi(x) \rangle = \langle f, \varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y| \rangle. \quad (7)$$

7) Еще один важный частный случай – *гомотетия*:

$$\chi(x) = y = tx, \quad (\chi^*)\psi(x) = \psi(tx) \quad (t > 0). \quad (8)$$

Она определена, в частности, в  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{E}$ . Транспонированный оператор имеет вид  $\varphi(x) \mapsto t^{-n}\varphi(y/t)$ . Для обобщенных функций  $f$  (из  $\mathcal{D}'$ ,  $\mathcal{S}'$ ,  $\mathcal{E}'$ ) определение гомотетии  $f(x) \mapsto f(tx)$  принимает вид

$$\langle f(tx), \varphi(x) \rangle = t^{-n} \langle f(y), \varphi(y/t) \rangle,$$

или

$$\langle f(tx), \varphi(x) \rangle = t^{-n} \langle f(x), \varphi(x/t) \rangle. \quad (9)$$

Иногда нужна гомотетия с отрицательным  $t$ ; тогда в (9)  $t^{-n}$  заменяется на  $|t|^{-n}$ .

## 5. Однородные обобщенные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенная функция  $f$  называется (положительно) *однородной степени  $s$* , если

$$f(tx) = t^s f(x) \quad (t > 0), \quad (10)$$

т.е.

$$t^{-n} \langle f(x), \varphi(x/t) \rangle = t^s \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad (t > 0). \quad (11)$$

ПРИМЕРЫ И ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Функция  $|x|^s$  на  $\mathbb{R}^n$  локально интегрируема при  $s > -n$ . Функционал типа этой функции является, конечно, однородной обобщенной функцией той же степени. Проведите сами формальную проверку.

2. Дельта-функция однородна степени  $-n$ :

$$\langle \delta(tx), \varphi(x) \rangle = t^{-n} \langle \delta(x), \varphi(x/t) \rangle = t^{-n} \varphi(0).$$

3. Если обобщенная функция  $f$  однородна степени  $s$ , то любая ее производная однородна степени  $s - 1$ .

Действительно,

$$t^{-n} \langle \partial_j f, \varphi(x/t) \rangle = -t^{-n} \langle f, \partial_j \varphi(x/t) \rangle = -t^{-n-1} \langle f, (\partial_j \varphi)(x/t) \rangle.$$

Из (11) следует, что правая часть равна

$$-t^{s-1} \langle f, \partial_j \varphi(x) \rangle = t^{s-1} \langle \partial_j f, \varphi(x) \rangle,$$

что и доказывает наше утверждение.

4. *Уравнение Эйлера для однородных обобщенных функций.* Уравнение Эйлера для обычных однородных степени  $s$  функций имеет, как известно, вид

$$\sum_1^n x_j \partial_j f(x) = s f(x). \quad (12)$$

Это условие эквивалентно однородности функции  $f$  степени  $s$ . Проверим, что это утверждение остается в силе для обобщенных функций. Для них уравнение (12) означает, что

$$-\langle f, \sum \partial_j (x_j \varphi(x)) \rangle = s \langle f, \varphi \rangle,$$

или

$$-\langle f, \sum x_j \partial_j \varphi(x) \rangle = (s + n) \langle f, \varphi \rangle. \quad (13)$$

Пусть  $f$  – обобщенная функция, однородная степени  $s$ . Это означает, что

$$\langle f, \varphi(x/t) \rangle = t^{s+n} \langle f, \varphi(x) \rangle.$$

Продифференцируем это тождество по  $t$ . Чтобы обосновать приведенное ниже вычисление производной левой части, следует временно заменить  $f$  подходящей обобщенной функцией с компактным носителем и использовать структуру таких обобщенных функций. Получим

$$-\langle f, \sum x_j t^{-2} \partial_j \varphi(x/t) \rangle = (s + n) t^{s+n-1} \langle f, \varphi(x) \rangle.$$

Полагая  $t = 1$ , получаем (13).

Обратно, пусть имеет место соотношение (13). Рассмотрим дробь

$$\frac{\langle f, \varphi(x/t) \rangle}{t^{s+n}}.$$

Продифференцируем ее по  $t$ . Получим

$$\frac{-\langle f, \sum x_j t^{-2} \partial_j \varphi(x/t) \rangle t^{s+n} - \langle f, \varphi(x/t) \rangle (s + n) t^{s+n-1}}{t^{2(s+n)}} = 0$$

в силу (13) с  $x/t$  вместо  $x$ . Значит,

$$\frac{\langle f, \varphi(x/t) \rangle}{t^{s+n}} = \text{const} = \langle f, \varphi(x) \rangle,$$

т.е.  $f$  однородна степени  $s$ .  $\square$

5. Пусть обобщенная функция  $f$  однородна степени  $s$ . Тогда ее преобразование Фурье однородно степени  $-n - s$ .

Действительно, нам дано соотношение (11), и надо проверить, что

$$t^{-n} \langle Ff, \psi(\xi/t) \rangle = t^{-s-n} \langle Ff, \psi(\xi) \rangle. \quad (14)$$

Пусть  $\varphi(x) = F[\psi(\xi)]$ . Левая часть в (14) равна

$$t^{-n}\langle f, F[\psi(\xi/t)] \rangle = t^{-n}\langle f, \int \psi(\xi/t) e^{-ix \cdot \xi} d\xi \rangle.$$

Здесь в интеграле делаем замену  $\xi/t = \eta$ . Получаем, что правая часть равна  $\langle f, \varphi(xt) \rangle$ , т.е., с учетом (11),

$$t^{-n-s}\langle f, \varphi(x) \rangle = t^{-n-s}\langle f, F[\psi(\xi)] \rangle = t^{-n-s}\langle Ff, \psi(x) \rangle,$$

что совпадает с правой частью в (14).  $\square$

## 6. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Уравнение

$$\Delta \mathcal{E} = \delta(x) \quad (15)$$

при преобразовании Фурье переходит в уравнение

$$-|\xi|^2 F\mathcal{E} = 1. \quad (16)$$

Умножим его на  $-1/|\xi|^2$ . Это формальная операция, так как обобщенные функции мы умеем умножать только на бесконечно гладкие функции. Однако рассмотрим получающуюся формулу

$$(F\mathcal{E})(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}. \quad (17)$$

Здесь справа – локально интегрируемая функция, если  $n \geq 3$ . В этом случае ее обратное преобразование Фурье – обобщенная функция, однородная степени  $-n + 2$ . Кроме того, правая часть в (17) сферически симметрична, т.е. не меняется при поворотах системы координат. Отсюда можно вывести, что ее обратное преобразование Фурье тоже сферически симметрично. (Здесь ЗАДАЧА. Обозначив через  $\chi$  поворот системы координат, найдите  $\chi^*$  для обобщенных функций и проверьте, что сферическая симметрия обобщенной функции влечет сферическую симметрию ее преобразования Фурье, как прямого, так и обратного.)

Сказанное позволяет предположить, что фундаментальное решение  $\mathcal{E}$  можно найти в виде

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}, \quad (18)$$

при  $n \geq 3$  это тоже локально интегрируемая функция. Это подтверждается следующей выкладкой, использующей формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x) \cdot v(x) dx - u(x) \cdot \Delta v(x)] dx = \int_{\Gamma} [\partial_{\nu} u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \partial_{\nu} v(x)] dS. \quad (19)$$

Здесь  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\partial_{\nu}$  – производная по внешней нормали,  $u$  и  $v$  – функции класса  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Мы имеем, полагая  $r = |x|$ ,

$$\langle \Delta r^{-n+2}, \varphi \rangle = \langle r^{-n+2}, \Delta \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r \geq \varepsilon} r^{-n+2} \Delta \varphi(x) dx.$$

Окрестность начала вырезана из-за особенности у  $r^{-n+2}$ . По формуле Грина (19), интеграл в правой части равен (с учетом того, что  $\partial_r$  – производная по внутренней нормали)

$$\int_{r \geq \varepsilon} \Delta r^{-n+2} \cdot \varphi(x) dx - \int_{r=\varepsilon} r^{-n+2} \partial_r \varphi(x) dS + \int_{r=\varepsilon} \partial_r r^{-n+2} \cdot \varphi(x) dS.$$

Справа первый интеграл равен нулю, так как функция  $r^{-n+2}$  гармонична вне начала координат. Второй стремится к нулю, так как “площадь” сферы радиуса  $\varepsilon$  имеет порядок  $\varepsilon^{n-1}$ . Третий стремится к  $-(n-2)\sigma_{n-1}\varphi(0)$ , где  $\sigma_{n-1}$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

Таким образом,

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = \tilde{c}_n \delta(x), \quad \text{где} \quad \tilde{c}_n = -(n-2)\sigma_{n-1}, \quad (20)$$

при  $n \geq 3$ , так что в этом случае

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{1}{\tilde{c}_n r^{n-2}} \quad (21)$$

– фундаментальное решение.

*Площадь единичной сферы  $\sigma_{n-1}$*  обычно вычисляется в курсе анализа. Напомним кратко, как это делается.

Положим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx.$$

Ясно, что  $I_n = I_1^n$ . Вычисляя интеграл  $I_n$  переходом к сферическим координатам и подстановкой  $r^2 = t$ , получаем

$$I_n = \sigma_{n-1} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \sigma_{n-1} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\sigma_{n-1}}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Кроме того,

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi,$$

так что  $I_1 = \sqrt{\pi}$ ,  $I_n = \pi^{n/2}$ . В итоге

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (22)$$

Используя известные формулы для гамма-функции, в частности, формулу  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , получаем окончательно

$$\sigma_{2k+1} = \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, \quad \sigma_{2k} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k-1)!!}, \quad (23)$$

где в последнем знаменателе – произведение нечетных чисел от 1 до  $2k-1$ .

Для фундаментального решения при  $n=3$  получается формула

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (24)$$

*Случай  $n=2$ .* При  $n=2$  функция  $r^{-2}$  не является локально интегрируемой и наше первоначальное рассуждение не проходит. Но если начать с функции  $\ln r$ , гармонической вне начала, то можно заметить следующее. Обобщенная функция  $\Delta \ln r$  сосредоточена в начале координат и, значит, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. Но первые производные логарифма однородны степени  $-1$  (и, как и логарифм, локально интегрируемы). Поэтому обобщенная функция  $\Delta \ln r$  однородна степени  $-2$ . Значит, она пропорциональна дельта-функции:

$$\Delta \ln r = \tilde{c}_2 \delta(x).$$

Постоянная вычисляется, как выше, при помощи формулы Грина для оператора Лапласа; она равна  $2\pi$ .

**ЗАДАЧА:** проведите это вычисление.

Таким образом, при  $n=2$  получается фундаментальное решение

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \quad (25)$$

Как строятся фундаментальные решения общих эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, можно прочитать в книге И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова “Обобщенные функции и действия над ними”.

## ЛЕКЦИЯ 9.

**6. Фундаментальное решение общего уравнения с постоянными коэффициентами.**

**Теорема.** Для любого уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u = 0 \quad (1)$$

существует фундаментальное решение  $\mathcal{E}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Хёрмандер). Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  и  $\psi(\xi) = F^{-1}[\varphi]$ . Мы положим

$$\langle \mathcal{E}, \varphi \rangle = \langle F\mathcal{E}, \psi \rangle = \int_H \frac{\psi(\zeta)}{a(\zeta)} d\zeta, \quad (2)$$

где  $H$  – некоторая поверхность в  $\mathbb{C}^n$ , “параллельная”  $\mathbb{R}^n$ .

При  $n = 1$  достаточно взять прямую

$$\{\zeta = \xi + i\tau : \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

с таким постоянным  $\tau$ , что она не проходит через нули многочлена  $a(\zeta)$ . Тогда интеграл существует и

$$\begin{aligned} \langle a(D)\mathcal{E}, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{E}, a(-D)\varphi \rangle = \\ &= \int_H \frac{a(\zeta)\psi(\zeta)}{a(\zeta)} d\zeta = \int_H \psi(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) d\xi = \varphi(0), \end{aligned}$$

что и требуется. Здесь использованы быстрое убывание функции  $\psi(\xi)$  в полосе  $|\operatorname{Im} \zeta| \leq \operatorname{const}$  и формула

$$\varphi(x) = \int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi.$$

При  $n > 1$  мы предположим, что в  $a(D)$  коэффициент при старшей производной  $D_n^m$  – ненулевое число.

**ЗАДАЧА.** Покажите, что этого всегда можно добиться подходящим поворотом системы координат.

Выход в комплексную область осуществляется тогда по переменному  $\zeta_n$  при каждом  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ . Если фиксировать  $\xi'$ , то можно выбрать такое  $\tau = \tau(\xi')$ , что, скажем,  $|\tau| \leq m + 1$  и

$$|a(\xi', \xi_n + i\tau)| \geq \operatorname{const} > 0 \quad (3)$$

при всех  $\xi_n$ , где постоянная не зависит от  $\xi$ .

Далее, каждая точка  $\xi'_0$  имеет окрестность  $O(\xi'_0)$  в  $\mathbb{R}^{n-1}$ , такую, что неравенство вида (3) (с вдвое меньшей константой) выполнено при всех  $\xi$  с  $\tau = \tau(\xi'_0)$ . Из покрытия пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$  такими окрестностями можно

выбрать локально конечное. Таким образом, можно указать такое покрытие  $\{O_j\}_1^\infty$  пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$  и такие значения  $\tau = \tau_j$ , что  $|\tau_j| \leq m + 1$  и

$$|a(\xi', \xi_n + i\tau_j)| \geq \text{const} > 0 \quad \text{при } \xi' \in O_j, \xi_n \in \mathbb{R} \quad (4)$$

с постоянной, не зависящей от  $j$ . Заменяем  $O_j$  на

$$\Omega_1 = O_1, \Omega_2 = O_2 \setminus \Omega_1, \Omega_3 = O_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

и т.д. Теперь определим  $H$  как множество всех точек

$$\zeta = (\xi', \xi_n + i\tau), \text{ где } \tau = \tau_j \text{ при } \xi' \in \Omega_j. \quad (5)$$

Это множество называют *лестницей Хёрмандера*. Проверка того, что формула (2) определяет фундаментальное решение, проводится так же, как в одномерном случае.

**ЗАДАЧА.** Проведите эту проверку.

Этим доказательство заканчивается.  $\square$

**7. Решения гипоеллиптических уравнений с изолированными особенностями.** Мы докажем теорему о структуре решения гипоеллиптического уравнения с постоянными коэффициентами вне некоторой точки, при подходе к которой это решение оценивается по модулю некоторой степени расстояния от нее.

**Теорема 1.** Пусть  $a(D)$  – гипоеллиптический оператор,  $\mathcal{E}(x)$  – фундаментальное решение уравнения  $a(D)u = 0$ ,  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ , содержащая начало координат, и  $u(x)$  – функция из  $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ , удовлетворяющая уравнению  $a(D)u = 0$  в  $\Omega \setminus \{0\}$ . Предположим, что вблизи начала

$$|u(x)| \leq C|x|^{-N} \quad (6)$$

с некоторыми положительными постоянными  $C$  и  $N$ . Тогда

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}(x) + u_0(x) \quad (7)$$

при некотором  $s$ , где  $c_\alpha$  – постоянные и  $u_0(x)$  – решение уравнения  $a(D)u_0 = 0$  в  $\Omega$ .

Ввиду гипоеллиптичности  $u_0 \in C^\infty(\Omega)$  и  $\mathcal{E}(x)$  – бесконечно гладкая функция вне начала координат. Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть функция  $u(x)$  принадлежит  $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$  и удовлетворяет условию (6) вблизи начала. Тогда существует такая обобщенная функция  $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , что ее сужение на  $\Omega$  совпадает с  $u(x)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция  $\psi(x)$  из  $\mathcal{D}(\Omega)$  равна 1 вблизи начала. Полагаем для  $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \left[ \varphi(x) - \psi(x) \sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right] dx. \quad (8)$$

Функция в квадратных скобках есть  $O(|x|^N)$ . Поэтому интеграл сходится и определяет, конечно, обобщенную функцию в  $\Omega$ . Если  $\varphi(x) = 0$  в окрестности начала, то  $\tilde{u}$  действует на  $\varphi$  как  $u(x)$ .  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Используя лемму, имеем

$$a(D)\tilde{u} = a(D)u = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}.$$

Поэтому носитель обобщенной функции  $a(D)\tilde{u}$  — точка 0 и

$$a(D)\tilde{u} = \sum_{|\alpha| \leq s} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x). \quad (9)$$

Положим

$$u_0(x) = \tilde{u} - \sum_{|\alpha| \leq s} c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}(x).$$

Это обобщенная функция из  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , и ввиду (9)  $a(D)u_0 = 0$  в  $\Omega$ , так что  $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ . В  $\Omega \setminus \{0\}$  получаем (7).  $\square$

В качестве следствия получается *теорема об устранимой особенности для гармонических функций*. Пусть снова  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , содержащая начало координат.

**Теорема 2.** Пусть  $u(x)$  — гармоническая функция в  $\Omega \setminus \{0\}$ , и пусть вблизи начала

$$u(x) = o(|x|^{-n+2}), \text{ если } n \geq 3, \quad o(\ln|x|^{-1}), \text{ если } n = 2. \quad (10)$$

Тогда  $u(x)$  — гармоническая функция в  $\Omega$ .

Действительно, из предположения (10) следует, что в (7) все  $c_\alpha$  равны 0, это получается последовательно, начиная с  $\alpha$  с наибольшим  $|\alpha|$ , с учетом формул для фундаментального решения.  $\square$

**8. Теорема Лиувилля и ее обобщения.** Теорема Лиувилля для гармонических функций будет приведена в конце этого пункта. Мы начнем с более общей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $a(0) = 0$  и  $a(\xi) \neq 0$  при остальных вещественных  $\xi$ ,  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  и  $a(D)u = 0$ . Тогда  $u$  — многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $v = Fu$ . Тогда  $a(\xi)v = 0$ . Поэтому обобщенная функция  $v$  сосредоточена в начале. Действительно, если  $\psi \in \mathcal{D}$  равна 0 в окрестности начала, то

$$\langle v, \psi \rangle = \langle v, a(\xi) \frac{\psi(\xi)}{a(\xi)} \rangle = \langle a(\xi)v, \frac{\psi(\xi)}{a(\xi)} \rangle = 0.$$

Значит,

$$v(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} b_\alpha \partial^\alpha \delta(x), \quad u(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} c_\alpha x^\alpha. \quad \square$$

Напомним, что  $u \in \mathcal{S}'$ , если, например, это непрерывная функция умеренного роста (т.е. роста не выше степенного). В частности, это может быть обычное (достаточно гладкое) решение. Таким образом, обычное решение  $u(x)$  умеренного роста оказывается многочленом. Если же предположить, что  $u(x)$  – ограниченное обычное решение, то получим, что это постоянная. Например, то и другое верно для гармонических функций. Теорема о постоянстве ограниченной в  $\mathbb{R}^n$  гармонической функции – это и есть *теорема Лиувилля*.<sup>1</sup>

Отметим, что условие  $a(\xi) \neq 0$  при  $\xi \neq 0$  существенно в теореме: если  $a(\xi_0) = 0$  при некотором  $\xi_0 \neq 0$ , то имеется решение  $e^{ix \cdot \xi_0}$ .

**ЗАДАЧА.** Пусть  $a(\xi) \neq 0$  при всех вещественных  $\xi$ . Проверьте, что тогда решение  $u \in \mathcal{S}$  уравнения  $a(D)u = 0$  оказывается тождественным нулем.

**9. Однородные обобщенные функции (окончание).** Этот пункт содержит существенные дополнения к п. 5.

*Аналитическое продолжение обобщенной функции  $f^\lambda$ .* Обобщенная функция  $f_\lambda$ , зависящая от числового параметра  $\lambda$ , называется *аналитической по  $\lambda$*  в некоторой области на комплексной плоскости, если числовая функция  $\langle f_\lambda, \varphi \rangle$  аналитична по  $\lambda$  в этой области.

Пусть  $f(x)$  – положительно однородная степени 1 непрерывная функция, положительная при  $x \neq 0$ . Функция  $f^\lambda(x)$  локально интегрируема при  $\operatorname{Re} \lambda > -n$  и определяет, конечно, аналитическую обобщенную функцию в этой полуплоскости. Рассмотрим вопрос о ее аналитическом продолжении. Запишем

$$\langle f^\lambda, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f^\lambda(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f^\lambda(x) \varphi(x) dx + \varphi(0) \int_{\Omega} f^\lambda(x) dx, \quad (11)$$

где  $\Omega$  – какая-нибудь ограниченная область, содержащая начало координат. Функцию  $\varphi$  считаем принадлежащей  $\mathcal{D}$ . Чтобы осуществить аналитическое продолжение, преобразуем последний интеграл. Используя уравнение Эйлера для  $f^\lambda$ , имеем

$$\int_{\Omega} f^\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} \sum_1^n \int_{\Omega} x_k \partial_k f^\lambda(x) dx.$$

Интегрируя справа по частям, получаем, что

$$\int_{\Omega} f^\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma} f^\lambda(x) \omega - \frac{n}{\lambda} \int_{\Omega} f^\lambda(x) dx, \quad (12)$$

где  $\Gamma$  – граница области  $\Omega$  (предполагаем границу гладкой) и форма  $\omega$  определяется равенством

$$\omega = x_1 dx_2 \dots dx_n - x_2 dx_1 dx_3 \dots dx_n + \dots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (13)$$

<sup>1</sup>Для гармонической вещественной функции известно более сильное утверждение: она постоянна, если ограничена с одной стороны.

Таким образом,

$$\int_{\Omega} f^{\lambda}(x) dx = \frac{1}{\lambda + n} \int_{\Gamma} f^{\lambda} \omega \quad (14)$$

и

$$\langle f^{\lambda}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f^{\lambda} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{R^n \setminus \Omega} f^{\lambda}(x) \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + n} \int_{\Gamma} f^{\lambda}(x) \omega. \quad (15)$$

По этой формуле левая часть аналитически продолжается в полуплоскость  $\operatorname{Re} \lambda > -n - 1$ , проколотую в точке  $\lambda = -n$ , где имеется, вообще говоря, простой полюс с вычетом

$$\varphi(0) \int_{\Gamma} \frac{\omega}{f^n(x)}. \quad (16)$$

В силу единственности аналитического продолжения этот вычет не зависит от выбора области  $\Omega$ . Можно сказать, что *обобщенная функция  $f^{\lambda}$  аналитически продолжена в полуплоскость  $\operatorname{Re} \lambda > -n - 1$  без точки  $-n$  с простым полюсом в этой точке и вычетом*

$$\delta(x) \int_{\Gamma} \frac{\omega}{f^n(x)}. \quad (17)$$

Геометрический смысл интеграла, входящего в выражение для вычета, легко выясняется при помощи формулы Стокса. Пусть  $\Omega$  – область, определяемая неравенством  $f(x) < 1$ . Так как

$$\int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = n \int_{\Omega} dx = n \operatorname{Vol}(\Omega),$$

то этот интеграл есть объем указанной области, умноженный на размерность  $n$ .

Возможно и дальнейшее аналитическое продолжение обобщенной функции  $f^{\lambda}$ , для чего в (11) из  $\varphi(x)$  надо вычитать не  $\varphi(0)$ , а бóльшие части тейлоровского разложения этой функции. Получается мероморфная по  $\lambda$  обобщенная функция с возможными простыми полюсами в точках  $-n - t$ , где  $t$  пробегает все натуральные числа. См. И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними.

Сказанное, в частности, приложимо к обобщенной функции  $r^{\lambda}$ . Можно показать, что  $r^{\lambda} / \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})$  продолжается до целой аналитической функции от  $\lambda$ .

## ЛЕКЦИЯ 10.

*Преобразование Фурье обобщенной функции  $r^\lambda$ .* Преобразование Фурье  $g_\lambda$  в смысле обобщенных функций от  $r^\lambda$ ,  $\lambda \in (-n, 0)$ , должно быть однородно степени  $-n - \lambda$ , а это число тоже принадлежит  $(-n, 0)$ . Можно ожидать, что  $g_\lambda = C_\lambda \rho^{-n-\lambda}$  с учетом того, что обе эти функции локально интегрируемы и сферически симметричны. Здесь  $\rho = |\xi|$ . Приняв этот факт без доказательства, как фактически делают Гельфанд и Шиллов, можно подсчитать коэффициент  $C_\lambda$ .

Для этого в равенство

$$\langle g_\lambda, \psi \rangle = \langle r^\lambda, \varphi \rangle,$$

где  $\varphi = F[\psi]$ , подставим  $\varphi(x) = e^{-r^2/2}$  и воспользуемся тем, что в одномерном случае

$$F^{-1}[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

Получим

$$\int r^\lambda e^{-r^2/2} dx = C_\lambda (2\pi)^{-n/2} \int \rho^{-n-\lambda} e^{-\rho^2/2} d\xi.$$

В этих интегралах надо перейти к сферическим координатам, после чего сделать замены  $r = \sqrt{2t}$  и  $\rho = \sqrt{2\tau}$ . В итоге получим

$$C_\lambda = 2^{\lambda+n} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}. \quad (1)$$

Этот результат обобщается на те  $\lambda$ , которые не являются полюсами аналитически продолженной обобщенной функции  $r^\lambda$ .

В частности, этим путем можно найти преобразование Фурье от  $r^{-n+2}$  при  $n \geq 3$  для нахождения фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$F[r^{-n+2}] = C_{-n+2} \rho^{-2}, \quad \text{где } C_{-n+2} = \frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

*Однородные функции степени  $-n$ .* Пусть  $f(x)$  — непрерывная при  $x \neq 0$  функция, однородная степени  $-n$ . Может ли она определять функционал типа функции несмотря на неинтегрируемую особенность? Мы сейчас не предполагаем, что она сохраняет знак.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x) \varphi(x) dx = \int f(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x) dx,$$

где  $\varphi \in \mathcal{D}$  и  $h$  настолько велико, что носитель этой функции лежит в шаре  $O_h(0)$  радиуса  $h$  с центром в начале. Последний интеграл запишем в сферических координатах ( $x = r\eta$ ):

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq h} r^{-1} dr \int_{r=1} f(\eta) dS.$$

Для его сходимости при  $\varepsilon \rightarrow 0$  необходимо и достаточно, чтобы интеграл от  $f$  по единичной сфере равнялся нулю:

$$\int_{r=1} f(\eta) dS = 0. \quad (2)$$

При этом условии  $\langle f(x), \varphi(x) \rangle$  существует как интеграл в смысле главного значения по Коши:

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r \geq \varepsilon} f(x) \varphi(x) dx = \int f(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx. \quad (3)$$

Примеры функций  $f(x)$ , удовлетворяющих условию (2), при  $n = 2$ :

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4}, \quad \frac{x_1 x_2}{|x|^4}.$$

*Дифференцирование функций, однородных степени  $-n + 1$ .* Пусть функция  $f(x)$  однородна степени  $-n + 1$ . Она определяет функционал типа функции, и это однородная обобщенная функция степени  $-n + 1$ . Подсчитаем ее производные в смысле обобщенных функций. Это будут однородные обобщенные функции степени  $-n + 1$ . Запишем их в виде

$$-\langle f, \partial_j \varphi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x) \partial_j [\varphi(x) - \varphi(0)] dx,$$

где  $h$  такое же, как выше, и проинтегрируем по частям. Получим

$$\begin{aligned} -\langle f, \partial_j \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon \leq r \leq h} \partial_j f(x) \cdot [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right. \\ &\quad \left. + \varphi(0) \int_{r=h} f(x) \omega_j - \int_{r=\varepsilon} f(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] \omega_j \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где форма  $\omega_j$  определяется равенством

$$\omega_j = (-1)^{j-1} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n. \quad (5)$$

Справа в (4) первый интеграл имеет предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а последний стремится к нулю. Получаем

$$-\langle f, \partial_j \varphi \rangle = \int_{r \leq h} \partial_j f(x) \cdot [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \varphi(0) \int_{r=h} f(x) \omega_j. \quad (6)$$

Последний интеграл, как легко проверить, не зависит от  $h$ . Это и есть ответ.

Если интеграл от обычной производной  $\partial_j f(x)$  по единичной сфере равен нулю, то получается

$$-\langle f, \partial_j \varphi \rangle = \int \partial_j f(x) \cdot \varphi(x) dx + \varphi(0) \int_{r=h} f(x) \omega_j,$$

где первый интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши; при этом второй интеграл не обязательно равен нулю. ЗАДАЧА. Подсчитайте при  $n = 2$  производную по  $x_2$  в смысле обобщенных функций от  $x_1/|x|^2$ .

Теперь вычислению лапласиана, например, от  $\ln r$  при  $n = 2$  можно придать следующий вид. Вычисляем обычные первые производные, это локально интегрируемые однородные функции

$$\frac{x_j}{r^2} \quad (j = 1, 2).$$

Вычисляем от них производные в смысле обобщенных функций по  $x_j$  и складываем; так как  $\ln r$  – гармоническая функция вне начала, то интеграл по шару исчезает, и мы получаем

$$\Delta \ln r = \delta(x) \int_{r=h} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Как легко подсчитать, например, при  $h = 1$ , последний интеграл равен  $2\pi$ , так что

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta(x).$$

ЗАДАЧА. Проведите аналогичный подсчет лапласиана от  $1/r$  при  $n = 3$ .

#### IV. СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Мы рассмотрим простейшие соболевские пространства  $H^s = W_2^s$  в  $\mathbb{R}^n$ , в полупространстве, в ограниченной области и на замкнутом многообразии.

##### 1. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

1.1. Исходным будем считать следующее *определение*. Пусть  $s$  – вещественное число. Пространство  $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$  состоит из таких обобщенных функций  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , что преобразование Фурье  $\tilde{u} = Fu$  в смысле обобщенных функций – обычная функция  $\tilde{u}(\xi)$  и величина

$$\|u\|_s^2 = \|u\|_{s,R^n}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (1)$$

конечна. Эта величина принимается за квадрат нормы в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

Очевидно, что получается линейное нормированное пространство. Его образ Фурье – это весовое пространство типа  $L_2$  с весом  $(1 + |\xi|^2)^s$ , или, что то же, обычное пространство  $L_2$  в  $\mathbb{R}^n$  относительно меры, которая на любом измеримом множестве  $M$  определяется равенством

$$\text{mes } M = \int_M (1 + |\xi|^2)^s d\xi. \quad (2)$$

Такое пространство полно, поэтому  $H^s$  – банахово пространство. Более того, это *гильбертово пространство* со скалярным произведением

$$(u, v)_s = (u, v)_{s,R^n} = \int (1 + |\xi|^2)^s \tilde{u}(\xi) \overline{\tilde{v}(\xi)} d\xi. \quad (3)$$

Очевидно, что  $\|u\|_s \leq \|u\|_{s'}$  при  $s < s'$ , так что пространство с бóльшим индексом непрерывно вложено в пространство с меньшим индексом. Пространство  $H^0$  очевидным образом совпадает с  $L_2(\mathbb{R}^n)$ . Поэтому *все пространства  $H^s$  с неотрицательным  $s$  состоят из обычных квадратично интегрируемых функций*. Дельта-функция  $\delta(x)$ , как легко понять, принадлежит  $H^s$  при  $s < -n/2$ .

Далее, у функций из  $H^1$  производные первого порядка в смысле обобщенных функций принадлежат  $L_2$ . Мы можем дать второе определение пространства  $H^1$ : это такие функции  $u(x)$  из  $L_2(\mathbb{R}^n)$ , что все их первые производные  $D_j u(x)$  в смысле обобщенных функций принадлежат  $L_2(\mathbb{R}^n)$ ; при этом

$$\|u\|_1^2 = \int \left[ |u(x)|^2 + \sum_1^n |D_j u(x)|^2 \right] dx. \quad (4)$$

Совпадение этой формулы с (1) при  $s = 1$  с точностью до числового множителя следует из равенства Парсеваля.

Более общий факт состоит в следующем.

**Теорема 1.** *При натуральном  $m$  пространство  $H^m(\mathbb{R}^n)$  состоит из таких квадратично интегрируемых функций, что их производные до порядка  $m$  включительно – квадратично интегрируемые функции. При этом норму в  $H^m(\mathbb{R}^n)$  можно определить равенством*

$$\|u\|_{m, \mathbb{R}^n}'^2 = \int \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)|^2 dx. \quad (5)$$

По существу это определение С.Л. Соболева (который рассматривал только целые неотрицательные  $s$ ). Эквивалентность норм  $\|u\|_m$  и  $\|u\|_m'$  при натуральном  $m$  следует из очевидного неравенства

$$0 < C_1 \leq \frac{\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2}{(1 + |\xi|^2)^m} \leq C_2. \quad (6)$$

Из этого неравенства следует также, что *любой оператор в частных производных с постоянными коэффициентами порядка  $m$  действует ограниченным образом из  $H^s$  в  $H^{s-m}$  при любом  $s$* . Немного дальше мы обобщим это утверждение на операторы с “достаточно хорошими” переменными коэффициентами.

**1.2.** Из уже сказанного видно, что элементы пространства  $H^s$  тем “лучше”, чем выше  $s$ . Еще более отчетливо это видно из следующей *теоремы вложения*, доказанной С.Л. Соболевым для натуральных  $s$ :

**Теорема 2.** *Пусть  $s$  вещественно и  $s > n/2$ . Тогда любая функция из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  равномерно непрерывна и ограничена после возможного исправления на множестве нулевой лебеговой меры. При этом справедливо неравенство*

$$\sup |u(x)| \leq C \|u\|_s, \quad (7)$$

означающее, что пространство  $H^s$  непрерывно вложено в пространство  $C_b(\mathbb{R}^n)$  непрерывных ограниченных функций с нормой  $\sup |u(x)|$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При сделанных предположениях преобразование Фурье  $\tilde{v}(\xi)$  функции  $u(x)$  – суммируемая функция: в силу неравенства Шварца

$$\int |\tilde{u}(\xi)| d\xi \leq \left( \int (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} = C \|u\|_s. \quad (8)$$

Поэтому почти всюду

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Действительно,  $u(x)$  восстанавливается по своему преобразованию Фурье формулой

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}(\xi), F^{-1}[\varphi] \rangle = \int \tilde{u}(\xi) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \varphi(x) dx d\xi,$$

и если справа поменять местами интегралы по теореме Фубини, то видно, что функция  $u(x)$  должна совпадать с правой частью в (9) почти всюду. Теперь можно воспользоваться фактом из анализа: (обратное) преобразование Фурье от суммируемой функции – непрерывная ограниченная функция. Это, впрочем, легко проверяется. Более того, из (8) следует (7). Для проверки непрерывности  $u(x)$  пишем

$$|u(x) - u(y)| \leq \int |e^{i(x-y) \cdot \xi} - 1| |\tilde{u}(\xi)| d\xi$$

и разбиваем интеграл на интеграл по шару  $O_R(0)$  и по его дополнению. При заданном  $\varepsilon > 0$  интеграл по дополнению меньше  $\varepsilon/2$ , если  $R$  достаточно велико. При фиксированном  $R$  интеграл по шару меньше  $\varepsilon/2$ , если  $|x - y|$  достаточно мал.  $\square$

**ЗАДАЧА 1.** Дополнительно покажите, используя аппроксимацию функции  $\tilde{u}(\xi)$  финитной гладкой функцией, что  $u(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

**ЗАДАЧА 2.** Проверьте, что  $u(x)$  удовлетворяет равномерному условию Гёльдера порядка  $\sigma$ , если  $0 < \sigma < s - n/2$ :

$$|u(x) - u(y)| \leq C_\sigma |x - y|^\sigma.$$

Указание:

$$\frac{|e^{ix \cdot \xi} - e^{iy \cdot \xi}|^2}{(1 + |\xi|^2)^\sigma} \leq \max_{t \geq 0} \frac{\min\{|x - y|^2 t^2, 4\}}{(1 + t^2)^\sigma} \leq C' |x - y|^{2\sigma}.$$

Доказанная теорема легко обобщается следующим образом.

**Теорема 3.** Пусть  $s \geq k + \frac{n}{2}$ , где  $k$  – целое неотрицательное число. Тогда любая функция из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  равномерно непрерывна и ограничена вместе со

своими производными до порядка  $k$  включительно. При этом справедливо неравенство

$$\sup |D^\alpha u(x)| \leq C_k \|u\|_s \quad \text{при } |\alpha| \leq k, \quad (10)$$

где постоянная не зависит от  $x$  и  $\alpha$ .

Добавим, что если  $u$  принадлежит пересечению всех пространств  $H^s$ , то это фактически бесконечно гладкая функция с ограниченными производными всех порядков.

**1.3.** Теперь выясним, как устроены соболевские пространства отрицательных порядков.

**Теорема 4.** При целом положительном  $m$  пространство  $H^{-m}$  состоит из конечных сумм производных до порядка  $m$  в смысле обобщенных функций от функций из  $L_2(\mathbb{R}^n)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы уже отмечали, что дифференцирование порядка  $m$  переводит функции из  $L_2(\mathbb{R}^n)$  в функции из  $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ . Пусть теперь  $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$  и  $\tilde{u}(\xi) = Fu$ . Тогда

$$w(\xi) = (1 + |\xi_1|^m + \dots + |\xi_n|^m)^{-1} \tilde{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

так как

$$0 \leq C_1 \leq \frac{1 + |\xi_1|^m + \dots + |\xi_n|^m}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \leq C_2.$$

Поэтому

$$\tilde{u}(\xi) = w(\xi) + \xi_1^m w_1(\xi) + \dots + \xi_n^m w_n(\xi), \quad \text{где } w_j(\xi) = \frac{|\xi|^m}{\xi_j^m} w(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Значит,

$$u = u_0 + D_1^m u_1 + \dots + D_n^m u_n,$$

где все функции  $u_j$  принадлежат  $L_2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

## ЛЕКЦИЯ 11.

Из последней теоремы следует, в частности, что *объединение пространств  $H^s(\mathbb{R}^n)$  содержит все обобщенные функции с компактными носителями*. Действительно, мы доказали раньше, что такие обобщенные функции – конечные суммы производных в смысле обобщенных функций от непрерывных функций с компактными носителями.

**1.4.** Следующее предложение – миниатюрная модель для некоторых из будущих теорем теории эллиптических операторов.

**Теорема 5.** *Оператор  $-1 + \Delta$  изоморфно и изометрически отображает пространство  $H^s(\mathbb{R}^n)$  на пространство  $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$  при любом  $s$ .*

Это сразу видно из нашего определения соболевских пространств, так как в образах Фурье наш оператор действует как умножение на  $1 + |\xi|^2$ . Соболевские пространства очень удобны для рассмотрения этого оператора. Далее мы увидим, что они удобны для построения общей теории эллиптических операторов.

Вот ближайшее и очевидное обобщение:

**Теорема 6.** *Пусть  $s$  и  $t$  – любые вещественные числа. Тогда оператор*

$$\Lambda_t = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{t/2}F \quad (1)$$

*изоморфно и изометрически отображает пространство  $H^s(\mathbb{R}^n)$  на пространство  $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$ .*

Как мы увидим, оператор (1) – это пример эллиптического псевдодифференциального оператора порядка  $t$ . Это  $t$ -я степень оператора  $1 - \Delta$ .

**1.5.** Пространство  $\mathcal{S}$  содержится, конечно, во всех пространствах  $H^s$ .

**Теорема 7.** *При любом  $s$  пространство  $H^s$  совпадает с пополнением пространства  $\mathcal{S}$  по норме  $\|\cdot\|_s$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u \in H^s$ . Тогда функция  $(1 + |\xi|^2)^{s/2}\tilde{u}(\xi)$  принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^n)$  и может быть приближена в  $L_2(\mathbb{R}^n)$  финитными бесконечно гладкими функциями  $v_k(\xi)$ . Запишем  $v_k$  в виде

$$v_k(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}w_k(\xi), \quad \text{где } w_k(\xi) = \frac{v_k(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}.$$

Конечно,  $w_k(\xi)$  – тоже финитные бесконечно гладкие функции, и они сходятся к  $\tilde{u}(\xi)$  в пространстве  $L_2$  с весом  $(1 + |\xi|^2)^s$ . Их прообразы Фурье заведомо принадлежат  $\mathcal{S}$  и сходятся к  $u$  в  $H^s$ .  $\square$

Усилим последний результат.

**Теорема 8.** *При любом  $s$  пространство  $H^s$  является пополнением пространства  $\mathcal{D}$  по норме пространства  $H^s$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно показать, что любую функцию  $u(x)$  из  $\mathcal{S}$  можно аппроксимировать финитными бесконечно гладкими функциями по

норме пространства  $H^s$ . Более того, достаточно сделать это при целом неотрицательном  $s$ . Пусть  $\varphi(x)$  – функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 при  $|x| \leq 1$ . Положим

$$u_\varepsilon(x) = u(x)\varphi(\varepsilon x).$$

Тогда при любом  $\alpha$

$$D^\alpha[u_\varepsilon(x) - u(x)] = D^\alpha u(x) \cdot [\varphi(\varepsilon x) - 1] + \sum c_{\beta\gamma} D^\beta u(x) \cdot D^\gamma \varphi(\varepsilon x), \quad (2)$$

где  $\alpha = \beta + \gamma$  и  $\gamma \neq 0$ . Так как

$$D^\gamma \varphi(\varepsilon x) = \varepsilon^{|\gamma|} (D^\gamma \varphi)(\varepsilon x),$$

то ясно, что правая часть в (2) стремится к 0 в  $L^2(\mathbb{R}^n)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$ .

**Следствие 1.** При  $s' > s$  пространство  $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$  плотно в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Следствие 2.** При любом  $s$  пространство  $H^s(\mathbb{R}^n)$  можно определить как пополнение линейала  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  по норме в этом пространстве.

Это относится и к норме при дробном  $s > 0$ , которую мы сейчас будем обсуждать.

**1.6.** Как мы видели, при натуральных  $s$  в  $H^s$  есть норма, которая записывается без преобразования Фурье. Сейчас мы укажем такую норму для дробных положительных  $s$ .

**Теорема 9.** Пусть  $s = k + \theta$ , где  $k$  – натуральное число и  $0 < \theta < 1$ . Тогда норма в  $H^s$  эквивалентна норме, определяемой равенством

$$\|u\|_s'^2 = \|u\|_k^2 + \sum_{|\alpha|=k} \iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy. \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим случай  $k = 0$  и вычислим интеграл

$$\iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy \quad (4)$$

через преобразование Фурье  $\tilde{u}(\xi)$  функции  $u(x)$ , считая ее финитной и бесконечно гладкой. Результат, который мы получим, указан ниже в формуле (7). Этот интеграл сходится, так как на компакте  $\text{supp } u(x) \times \text{supp } u(y)$  особенность при  $x = y$  интегрируема, а вне этого множества интегрируемы  $|u(x)|^2 |x - y|^{-n-2\theta}$  и  $|u(y)|^2 |x - y|^{-n-2\theta}$ . Он допускает поэтому запись

$$\int \frac{1}{|z|^{n+2\theta}} dz \int |u(x+z) - u(x)|^2 dx. \quad (5)$$

Внутренний интеграл в силу равенства Парсеваля с точностью до постоянного множителя равен

$$\int |e^{iz \cdot \xi} - 1|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Здесь

$$|e^{iz \cdot \xi} - 1|^2 = [\cos(z \cdot \xi) - 1]^2 + \sin^2(z \cdot \xi) = 2 - 2 \cos(z \cdot \xi) = 4 \sin^2[(z \cdot \xi)/2].$$

Обозначим через  $\vartheta$  угол между векторами  $z$  и  $\xi$ . Меняя порядок интегрирования по теореме Фубини, рассмотрим теперь интеграл

$$\int |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \int \frac{\sin^2[(z \cdot \xi)/2]}{|z|^{n+2\theta}} dz. \quad (6)$$

Здесь внутренний интеграл равен

$$\int \sin^2\left(\frac{1}{2}|z||\xi| \cos \vartheta\right) \frac{dz}{|z|^{n+2\theta}}.$$

Перейдем здесь к сферическим координатам:  $z = r\omega$ ,  $dz = r^{n-1} dr dS$ . После этого сделаем замену  $\frac{1}{2}|\xi|r \cos \vartheta = \tau$ . Получим с точностью до постоянного множителя

$$|\xi|^{2\theta} \int_S \cos^{2\theta} \vartheta dS \int_0^\infty \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{1+2\theta}} d\tau = C_\theta |\xi|^{2\theta}.$$

Мы показали, что

$$\iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy = C_\theta \int |\xi|^{2\theta} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi. \quad (7)$$

Этот результат предельным переходом распространяется на  $u \in H^\theta$ . Этим теорема фактически доказана для  $k = 1$ . На ненулевые  $k$  она распространяется автоматически.  $\square$

**1.7.** Рассмотрим вопрос о реализации пространства, сопряженного к пространству  $H^s$ , т.е. пространства линейных непрерывных функционалов над  $H^s$ . Таких реализаций имеется две.

Первая состоит в том, что поскольку  $H^s$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $(u, v)_s$ , *общий вид линейного непрерывного функционала  $f(u)$  над  $H^s$  есть*

$$f(u) = (u, v)_s, \quad (8)$$

где  $v$  — любой фиксированный элемент из  $H^s$ , он однозначно определяется по  $f$ .

Вторая состоит в использовании двойственности между  $H^s$  и  $H^{-s}$ . Дело в том, что форма  $(u, v)_0$  на  $H^0$  продолжается на прямое произведение  $H^s \times H^{-s}$  по формуле

$$(u, v)_0 = \int \tilde{u}(\xi) \cdot \overline{\tilde{v}(\xi)} d\xi \quad (9)$$

и при этом так продолженная форма удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца

$$|(u, v)_0| \leq \|u\|_s \|v\|_{-s}. \quad (10)$$

Последнее получается применением к

$$\int \tilde{u}(\xi) \cdot \overline{\tilde{v}(\xi)} d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(\xi) \cdot (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \overline{\tilde{v}(\xi)} d\xi$$

обычного неравенства Шварца.

**Теорема 10.** При любом  $s$  любой линейный непрерывный функционал  $f(u)$  над  $H^s$  может быть представлен в виде

$$f(u) = (u, v)_0, \quad (11)$$

где  $v$  — элемент из  $H^{-s}$ , однозначно определяемый по  $f$ . И обратно, при любом  $v \in H^{-s}$  выражение (11) есть линейный непрерывный функционал над  $H^s$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение очевидно. Чтобы доказать первое, положим  $u_1 = \Lambda_s u$  (см. формулу (1)). Тогда  $u_1 \in H^0$  и  $g(u_1) = f(u)$  — линейный непрерывный функционал над  $H^0$ . Следовательно,

$$f(u) = \int \tilde{u}_1(\xi) \overline{\tilde{v}_1(\xi)} d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(\xi) \overline{\tilde{v}_1(\xi)} d\xi,$$

где  $v_1 \in H^0$ . Отсюда видно, что

$$f(u) = (u, v)_0 \text{ где } v = \Lambda_s v_1 \in H^{-s}. \quad \square.$$

**1.8.** Теперь мы обсудим условия, при которых оператор умножения на функцию  $a(x)$  ограничен в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Для  $s = 0$  это известно: в  $L_2(\mathbb{R}^n)$  ограничен оператор умножения на ограниченную измеримую функцию. Ее, конечно, достаточно считать ограниченной в существенном, т.е. ограниченной вне множества нулевой меры. Из сказанного сразу получается (с использованием формулы Лейбница для производной произведения)

**Теорема 11.** Пусть  $m$  — натуральное число и функция  $a(x)$  непрерывна и ограничена с производными до порядка  $m - 1$  включительно, а ее производные порядка  $m$  существуют и ограничены, по крайней мере, вне множества нулевой меры. Тогда оператор умножения на  $a(x)$  ограничен в  $H^m(\mathbb{R}^n)$ .

В частности, достаточно, чтобы функция  $a(x)$  была непрерывна и ограничена с производными до порядка  $m$  включительно. Теперь рассмотрим дробные  $s$ .

**Теорема 12.** Пусть  $m$  — целое число и  $s = m + \theta$ ,  $0 < \theta < 1$ . Пусть функция  $a(x)$  имеет непрерывные и ограниченные производные до порядка  $m$  включительно, а ее производные порядка  $m$  удовлетворяют равномерному условию Гёльдера с показателем  $\vartheta \in (\theta, 1]$ . Тогда оператор умножения на  $a(x)$  ограничен в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для  $m = 0$ . Предполагая, что  $u(x) \in H^\theta$ , надо оценить величину

$$\iint \frac{|a(x)u(x) - a(y)u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy \quad (12)$$

через  $\|u\|_\theta^2$ . Ясно, что

$$|a(x)u(x) - a(y)u(y)|^2 \leq 2|a(x)[u(x) - u(y)]|^2 + 2|[a(x) - a(y)]u(y)|^2.$$

Поэтому величина (12) не превосходит

$$2 \sup |a(x)|^2 \|u\|_\theta^2 + \int |u(y)|^2 I(y) dy,$$

где

$$I(y) = \int \frac{|a(x) - a(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx, \quad (13)$$

и дело сводится к проверке равномерной ограниченности этого интеграла. В силу нашего предположения о функции  $a(x)$  подинтегральное выражение не превосходит  $\text{Const } |x - y|^{-n+2(\vartheta-\theta)}$  вблизи нуля и  $\text{Const } |x - y|^{-n-2\theta}$  на бесконечности, интеграл от этого выражения сходится и мажорируется постоянной, не зависящей от  $x$ , так что нужная равномерная ограниченность очевидна.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из доказательства, относительно производных  $D^\alpha a(x)$  старшего порядка  $|\alpha| = m$  достаточно предположить, что интегралы

$$J_\alpha(x) = \int \frac{|D^\alpha a(x) - D^\alpha a(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dy \quad (14)$$

сходятся и равномерно ограничены, по крайней мере, вне множества нулевой меры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этих лекциях не было возможности затронуть вопросы интерполяции. На самом деле соболевские пространства в  $\mathbb{R}^n$  образуют “интерполяционную шкалу”. Из этого, в частности, следует, что так как оператор умножения на функцию  $a(x)$  с ограниченными и непрерывными производными до порядка  $m$  включительно ограничен в  $H^{m-1}$  и  $H^m$ , то он ограничен в  $H^s$  при промежуточных  $s$ , т.е. при  $m - 1 < s < m$ .

Рассмотрим теперь вопрос об ограниченности оператора умножения на  $a(x)$  в  $H^s$  с отрицательным  $s$ . Здесь прежде всего возникает вопрос об определении. Следующая точка зрения приемлема. Пусть  $u \in H^s$  и  $\{u_n\}$  – последовательность из  $\mathcal{D}$ , сходящаяся к  $u$  в  $H^s$ . Тогда  $au = \lim_{n \rightarrow \infty} au_n$ , если этот предел существует в  $H^s$  и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности  $\{u_n\}$ . Будем считать это *определением* оператора умножения на  $a(x)$  в  $H^s$  при отрицательном  $s$ . Другая возможность – рассмотреть свертку в образах Фурье, мы не будем тратить на это время. Теперь заметим, что при  $v \in H^{-s}$ ,  $-s = |s|$ , если оператор умножения на  $a(x)$  ограничен в  $H^{-s}$ ,

$$(au_n, v)_0 = (u_n, av)_0 \rightarrow (u, \bar{a}v)_0. \quad (15)$$

Отсюда видна третья возможность, эквивалентная первой: оператор умножения на  $a(x)$  в  $H^s$ ,  $s < 0$ , *определяется* в этом случае соотношением

$$(au, v)_0 = (u, \bar{a}v)_0 \quad \text{при } v \in H^{-s}. \quad (16)$$

Очевидно, что операторы умножения на  $a(x)$  и на  $\overline{a(x)}$  одновременно ограничены в  $H^{-s}$  или нет. Получаем следующий вполне удобный результат:

**Теорема 13.** *Пусть  $s$  отрицательно и оператор умножения на  $a(x)$  ограничен в  $H^{|s|}$ . Тогда он определяется в  $H^s$  соотношением (16) и ограничен в этом пространстве.*

Приведем еще такое пояснение. Мы знаем, что  $H^s$  и  $H^{-s}$  – сопряженные пространства. На финитных гладких функциях, конечно,  $(au, v)_0 = (u, \bar{a}v)_0$ , поэтому сопряженным к оператору умножения на  $a$  в  $H^s$  должен быть оператор умножения на  $\bar{a}$ . Оператор в данном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор ограничен в сопряженном пространстве. Отсюда видно, что условие ограниченности оператора умножения на  $a$  в  $H^{|s|}$  в формулировке последней теоремы необходимо.

Рассмотрим теперь линейный оператор в частных производных с переменными коэффициентами

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha. \quad (17)$$

Если все  $a_\alpha(x)$  – ограниченные измеримые функции, то это ограниченный оператор из  $H^m(\mathbb{R}^n)$  в  $H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$ .

В качестве некоторой подготовки к рассмотрению псевдодифференциальных операторов сформулируем

**Следствие.** *Оператор (8) с коэффициентами, имеющими непрерывные и ограниченные производные всех порядков, действует ограниченным образом из  $H^s$  в  $H^{s-m}$  при любом  $s$ .*

## ЛЕКЦИЯ 12.

**1.9.** Рассмотрим вопрос о следе функции из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  на гиперплоскости  $\mathbb{R}^{n-1}$ , определяемой для удобства равенством  $x_n = 0$ . Положим  $x = (x', x_n)$ . Через  $F'$  обозначим преобразование Фурье функций от  $x'$  в функции от  $\xi'$ .

**Теорема 14.** Пусть  $s > 1/2$ . Тогда для функций  $u \in \mathcal{D}$  справедливо неравенство

$$\|u(x', 0)\|_{s-1/2, \mathbb{R}^{n-1}} \leq C \|u(x)\|_{s, \mathbb{R}^n}, \quad (1)$$

где  $C$  – не зависящая от  $u$  постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим  $F'[u](\xi', x_n)|_{x_n=0}$  в виде

$$F'[u](\xi', 0) = (2\pi)^{-1} \int F[u](\xi) d\xi_n.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|F'[u](\xi', 0)|^2 \leq (2\pi)^{-2} \int |F[u]|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n \int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n.$$

Последний интеграл легко вычисляется подстановкой  $\xi_n/(1 + |\xi|^2)^{1/2} = \tau$ ; с точностью до постоянного множителя он равен  $(1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2}$ . Остается разделить на него обе части и проинтегрировать их по  $\xi'$ .  $\square$

Эта теорема позволяет дать следующее определение следа функции  $u$  из  $H^s$  на  $\mathbb{R}^{n-1}$  при  $s > 1/2$ .

**Определение.** Пусть  $\{u_i\}$  – последовательность функций из  $\mathcal{D}$ , сходящаяся к  $u$  в  $H^s$ . Тогда она фундаментальна, и из (1) вытекает, что их следы на  $\mathbb{R}^{n-1}$  образуют фундаментальную последовательность в  $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Ввиду полноты этого пространства там есть предел. Более того, из (1) вытекает, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, так как любые две такие последовательности неограниченно сближаются в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Этот предел и называется *следом* функции  $u$  на  $\mathbb{R}^{n-1}$ , и он обозначается через  $u(x', 0)$ .

Для обычных непрерывных функций из  $H^s$  этот след очевидным образом совпадает с обычным следом. В силу (1) оператор перехода к следу действует ограниченным образом из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  в  $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ .

Теорему 14 доказал Л.Н. Слободетский (1958). Он же показал на примере, что неравенство (1) теряет силу при  $s = 1/2$ . Времени на разбор этого примера у нас нет.

Из теоремы 14 следует, что если  $s > t + 1/2$ , где  $t$  – натуральное число, и  $a(D)$  – оператор в частных производных порядка  $t$  для простоты с постоянными коэффициентами, то для функций  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  выражение  $a(D)u$  имеет след на  $\mathbb{R}^{n-1}$ , принадлежащий  $H^{s-t-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ , причем оператор перехода к этому следу ограничен в соответствующих нормах.

Позднее мы определим соболевские пространства в полупространстве, в частности, в  $\mathbb{R}_+^n = \{x : x_n > 0\}$ . Для функций из этих соболевских пространств можно будет говорить об их граничных значениях на граничной гиперплоскости  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**1.10.** Здесь мы рассмотрим усреднения функции из  $H^s$ .

Пусть  $\omega(x) \in \mathcal{D}$ . Если  $u \in H^s$  при некотором  $s$ , то, конечно,  $u \in \mathcal{D}'$ , так что определена свертка  $u * \omega$ , по крайней мере, в смысле обобщенных функций. В лекции 7 у нас доказано, что это бесконечно гладкая функция и

$$\text{supp}(u * \omega) \subset \text{supp } u + \text{supp } \omega. \quad (2)$$

**Предложение 1.** При  $u \in H^s$ ,  $\omega \in \mathcal{D}$

$$F[u * \omega] = F[u]F[\omega]. \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Такое соотношение доказано у нас, если  $u \in \mathcal{S}'$ . Утверждать, что  $u \in \mathcal{S}$ , мы не можем, но мы можем аппроксимировать  $u$  в  $H^s$  финитными бесконечно гладкими функциями  $u_n$ . Для них мы имеем

$$F[u_n * \omega] = F[u_n]F[\omega],$$

и здесь  $F[u_n] \rightarrow F[u]$  в пространстве  $L_2$  с весом  $(1 + |\xi|^2)^s$ . Так как  $F[\omega] \in \mathcal{S}$ , то такая сходимость сохраняется после умножения на  $F[\omega]$ . Отсюда следует, что  $u_n * \omega$  сходится в  $H^s$ . С другой стороны, можно доказать, что  $u_n * \omega \rightarrow u * \omega$  в смысле обобщенных функций (ср. п. 9 в лекции 2). Поэтому  $u_n * \omega \rightarrow u * \omega$  в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , и в пределе получается нужная формула (3).  $\square$

Пусть теперь

$$\omega(x) \geq 0, \quad \omega(x) = 1 \quad \text{вблизи } 0, \quad \int \omega(x) dx = 1. \quad (4)$$

Положим при  $h > 0$

$$\omega_h(x) = h^{-n} \omega\left(\frac{x}{h}\right). \quad (5)$$

Это дельтаобразное семейство при  $h \rightarrow 0$ . Свертку  $u * \omega_h$  называют *усреднением* функции (или обобщенной функции)  $u$ .

**Предложение 2.**

$$u * \omega_h \rightarrow u \quad \text{в } H^s.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как легко проверить,  $F[\omega_h](\xi) = F[\omega](h\xi)$ , и здесь правая часть – равномерно по  $h$  ограниченная функция, равномерно сходящаяся к  $F[\omega](0) = 1$  в любом шаре  $O_R = O_R(0)$ . Поэтому  $F[u]F[\omega_h] \rightarrow F[u]$  в пространстве  $L_2$  с весом  $(1 + |\xi|^2)^s$ . Остается воспользоваться предложением 1.  $\square$

**1.11.** Здесь мы докажем теорему о компактности, которая позднее даст очень важные следствия для соболевских пространств в ограниченных областях и на компактных многообразиях.

**Теорема 15.** Пусть  $s < s'$  и  $X$  – ограниченное множество в  $H^{s'}$ , причем носители всех элементов из  $X$  лежат в фиксированном компакте  $K$  пространства  $R^n$ . Тогда  $X$  предкомпактно в  $H^s$ , т.е. каждая последовательность  $\{u_l\}$  элементов из  $X$  содержит подпоследовательность, сходящуюся в  $H^s$ .

**Доказательство.** Так как каждую функцию  $u_l$  можно аппроксимировать ее усреднением с любой степенью точности, то предположим, не ограничивая общности, что  $u_l \in \mathcal{D}$ . При этом  $u_l$  имеют ограниченные нормы в  $H^{s'}$  и носители, лежащие в фиксированном компакте  $K'$  (см. (2)). Пусть  $v_l(\xi) = F[u_l]$ .

Покажем, что в любом фиксированном шаре  $O_R$  эти функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Для этого возьмем функцию  $\varphi \in \mathcal{D}$ , равную 1 в окрестности компакта  $K'$ . Тогда  $u_l(x) = u_l(x)\varphi(x)$  и поэтому

$$v_l(\xi) = \int v_l(\eta)\psi(\xi - \eta) d\eta,$$

где  $\psi = F[\varphi]$ . Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|v_l(\xi)|^2 \leq \|u_l\|_{s'}^2 \int (1 + |\eta|^2)^{-s'} |\psi(\xi - \eta)|^2 d\eta$$

и

$$|v_l(\xi) - v_l(\tilde{\xi})|^2 \leq \|u\|_{s'}^2 \int (1 + |\eta|^2)^{-s'} |\psi(\xi - \eta) - \psi(\tilde{\xi} - \eta)|^2 d\eta.$$

Теперь пользуемся быстрой сходимостью  $\psi(\eta)$  к нулю при  $\eta \rightarrow \infty$  и равномерной непрерывностью этой функции на любом компакте. Отсюда и видна равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций  $v_l$  в любом  $O_R$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \|u_l - u_m\|_s^2 &= \int_{O_R} (1 + |\xi|^2)^s |v_l(\xi) - v_m(\xi)|^2 d\xi + \\ &+ \int_{R^n \setminus O_R} (1 + |\xi|^2)^{s-s'} (1 + |\xi|^2)^{s'} [|v_l(\xi)|^2 + |v_m(\xi)|^2] d\xi. \end{aligned}$$

При заданном  $\varepsilon > 0$  мы можем выбрать настолько большое  $R$ , что второй интеграл будет меньше  $\varepsilon/2$  для всех  $l, m$ . Затем, пользуясь теоремой Арцела в применении к семейству функций  $v_l$  на шаре  $\overline{O_R}$ , мы можем указать такое  $N$ , что первый интеграл будет меньше  $\varepsilon/2$  при некоторых  $l, m > N$ .

Отсюда ясно, что последовательность  $\{u_l\}$  содержит подпоследовательность, сходящуюся в  $H^s$ .  $\square$

**2. Пространства Соболева на замкнутом многообразии.** Пусть  $M$  –  $n$ -мерное бесконечно гладкое многообразие. Мы ограничимся случаем, когда  $M$  замкнуто, т. е. компактно и не имеет края. Каждая его точка имеет

на нем координатную окрестность, т.е. окрестность, в которой можно ввести локальные координаты, причем в пересечениях двух таких окрестностей переход от одних локальных координат к другим является невырожденным бесконечно гладким преобразованием. Ввиду компактности многообразие допускает покрытие конечным набором координатных окрестностей. Функция  $u(x)$  на  $M$  называется *бесконечно гладкой*, если после перехода к локальным координатам получается бесконечно гладкая функция от этих координат. Отметим, что на  $M$  существует конечное разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_j(x) = 1, \quad (6)$$

состоящее из бесконечно гладких неотрицательных функций, носитель каждой из которых лежит в какой-нибудь координатной окрестности.

Соболевскую норму  $\|u\|_s = \|u\|_{s,M}$  определим равенством

$$\|u\|_{s,M}^2 = \sum_1^N \|u\varphi_j\|_{s,R^n}^2, \quad (7)$$

где функции  $\varphi_j$  образуют разбиение единицы и произведения  $u\varphi_j$  рассматриваются как *перенесенные на  $\mathbb{R}^n$* . Это означает, что после перехода к локальным координатам функция продолжается на  $\mathbb{R}^n$  нулем вне ее носителя. Норма (7) зависит, конечно, от выбора разбиения единицы и локальных координат, но можно проверить, что *разные нормы эквивалентны*, т.е. их отношение заключено между положительными постоянными. *Пространство  $H^s(M)$*  мы определим как пополнение пространства  $C^\infty(M)$  по этой норме.

Заметим, что норме (7) отвечает скалярное произведение

$$(u, v)_{s,M} = \sum_1^N (\varphi_j^2 u, v)_{s,R^n}. \quad (8)$$

Поэтому  $H^s$  – *гильбертово пространство*.

Мы теперь перечислим свойства этих пространств. Соответствующие утверждения как правило легко выводятся из определения и из аналогичных утверждений для  $\mathbb{R}^n$ , так что пояснения будут короткими.

1. Если  $u \in H^s(M)$  и  $\varphi$  – функция из  $C^\infty(M)$  с носителем, лежащим в координатной окрестности, то перенесение функции  $\varphi u$  на  $\mathbb{R}^n$  принадлежит  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

2. *Пространство  $H^0(M)$  совпадает с пространством квадратично интегрируемых функций  $L_2(M)$* . (Скалярное произведение в  $L_2(M)$  определяем формулой (8) и вдаваться в обсуждение других вариантов его определения не будем. Один из вариантов состоит в том, что многообразие рассматривается как вложенное в  $\mathbb{R}^N$ ,  $N > n$ , и на  $M$  берется мера, индуцированная из  $\mathbb{R}^N$ .) *При  $s' > s$  имеет место вложение пространства  $H^{s'}(M)$  в  $H^s(M)$ , оператор вложения непрерывен и, более того, вполне непрерывен*. Последний

факт очень важен, он следует из теоремы 15. *Пространство  $H^{s'}(M)$  плотно в  $H^s(M)$  при  $s' > s$ .* Пространство  $C^\infty(M)$  плотно во всех  $H^s(M)$ .

3. При  $s > n/2$  функция из  $H^s(M)$  непрерывна после подходящего изменения на множестве нулевой меры (и даже локально удовлетворяет условию Гёльдера порядка  $\theta$  в локальных координатах, если  $0 < \theta < n/2 - s$ ,  $\theta \leq 1$ ). Более того, *пространство  $H^s(M)$  непрерывно вложено в пространство  $C^0(M)$  непрерывных функций с нормой  $\max |u|$ .*

При  $s > m + n/2$  с натуральным  $m$  функции из  $H^s(M)$  локально непрерывно дифференцируемы до порядка  $m$  после возможного изменения на множестве нулевой меры. Несложно определить пространство  $C^m(M)$ , используя разбиение единицы, и проверить непрерывность вложения  $H^s(M)$  в  $C^m(M)$ . Пересечение всех пространств  $H^s(M)$  по существу совпадает с  $C^\infty(M)$ .

4. Используя разбиение единицы, локальные координаты и форму

$$\langle u, v \rangle = (u, \bar{v})_{0,M}, \quad (9)$$

можно ввести *обобщенные функции на  $M$*  – линейные непрерывные функционалы над пространством  $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$ . Мы эту возможность раньше не обсуждали.

Пространство  $H^{-m}(M)$  с натуральным  $m$  состоит из таких обобщенных функций из  $\mathcal{E}'(M)$ , что локально, в локальных координатах, они являются производными в смысле обобщенных функций до порядка  $m$  от функций из  $L_2(M)$ .

Отсюда на самом деле следует, что объединение всех соболевских пространств на  $H^s(M)$  содержит все обобщенные функции на  $M$ .

5. *Пространство линейных непрерывных функционалов над  $H^s$  можно отождествить: 1) с  $H^s(M)$ , используя форму  $(u, v)_{s,M}$ ; 2) с  $H^{-s}(M)$ , используя продолжение формы  $(u, v)_{0,M}$  на  $H^s(M) \times H^{-s}(M)$ .*

Здесь легко проверяются первое утверждение и *обобщенное неравенство Шварца*

$$|(u, v)_{0,M}| \leq C \|u\|_{s,M} \|v\|_{-s,M}. \quad (10)$$

В силу этого неравенства форма  $(u, v)_{0,M}$  продолжается до ограниченной формы на  $H^s(M) \times H^{-s}(M)$  и при фиксированном  $v \in H^{-s}(M)$  определяет линейный непрерывный функционал над  $H^s(M)$ . Однако для доказательства того, что это общий вид линейного непрерывного функционала на  $H^s(M)$ , нужно при любых  $t, \sigma$  иметь линейный оператор  $\Lambda_{t,\sigma}$ , непрерывно отображающий  $H^\sigma(M)$  на  $H^{\sigma-t}(M)$  и обратимый. Такой оператор, не зависящий от  $\sigma$ , легко строится в теории эллиптических псевдодифференциальных операторов на  $M$ .

6. *Оператор умножения на функцию из  $C^k(M)$  ограничен в  $H^s(M)$  при  $|s| \leq k$ . Оператор умножения на бесконечно гладкую функцию ограничен во всех  $H^s(M)$ .*

Эти утверждения легко проверяются; мы не будем их уточнять.

## ЛЕКЦИЯ 13.

**3. Соболевские пространства в ограниченной области и в полупространстве.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с бесконечно гладкой  $(n-1)$ -мерной границей, и пусть  $s$  – неотрицательное число. Возможны три определения пространства  $H^s(\Omega)$ .

**Определение 1.** Пространство  $H^s(\Omega)$  определяется как пополнение пространства  $C^\infty(\bar{\Omega})$  при целом  $s = m$  по норме, определяемой равенством

$$\|u\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx, \quad (1)$$

и при дробном  $s = m + \theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , по норме, определяемой равенством

$$\|u\|_{s,\Omega}^2 = \|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\theta}} dx dy. \quad (2)$$

При  $\theta = 0$  функции из  $C^m(\bar{\Omega})$  лежат в этом пространстве, и вместо  $C^\infty(\bar{\Omega})$  достаточно рассматривать пополнение пространства  $C^m(\bar{\Omega})$ . При  $\theta > 0$  достаточно рассмотреть пополнение пространства  $C^{m+\theta'}(\bar{\Omega})$  функций с производными порядка  $m$ , удовлетворяющими равномерному условию Гёльдера порядка  $\theta' \in (\theta, 1]$ .

**Определение 2.** Функция  $u(x)$  принадлежит  $H^s(\Omega)$ , если она является сужением на  $\Omega$  функции  $v(x)$  из  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . При этом норма  $\|u\|'_{s,\Omega}$  определяется как нижняя грань норм функций  $v(x)$  из  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , сужения которых на  $\Omega$  совпадают с  $u(x)$ .

О значениях  $u(x)$  на границе можно не беспокоиться, так как все функции рассматриваются с точностью до их значений на множестве нулевой меры.

**Определение 3.** Пусть  $s = m + \theta$ , где  $m$  – целое неотрицательное число и  $0 \leq \theta < 1$ . Пространство  $H^s(\Omega)$  состоит из таких квадратично интегрируемых функций в  $\Omega$ , что их производные до порядка  $m$  включительно в смысле обобщенных функций в  $\mathcal{D}'(\Omega)$  – квадратично интегрируемые функции и при  $\theta > 0$  конечна величина (2). Норма в этом пространстве определяется формулой (1) при  $\theta = 0$  и (2) при  $\theta > 0$ .

Совершенно такие же определения даются для соболевских пространств  $H^s(\mathbb{R}_+^n)$  с неотрицательным  $s$ , где  $\mathbb{R}_+^n$  – полупространство в  $\mathbb{R}^n$ , определяемое неравенством  $x_n > 0$ . Но в этом случае в первом определении берутся функции с компактными носителями в замкнутом полупространстве.

Более общие области в  $\mathbb{R}^n$  мы рассматривать не будем.

**Теорема 1.** Определения 1 – 3 эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО наметим сначала для полупространства. Не вызывает сомнений, что при аппроксимации функций из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  гладкими финитными функциями их сужения на  $\mathbb{R}_+^n$  сходятся в норме  $\|\cdot\|_{s,\mathbb{R}_+^n}$ . Поэтому сужения функций из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  на  $\mathbb{R}_+^n$  принадлежат  $H^s(\mathbb{R}_+^n)$  в смысле определения 1. Пусть

теперь  $u(x)$  – функция из  $H^s(\mathbb{R}_+^n)$  в смысле определения 1. Для ее продолжения до функции  $v$  из  $H^s(\mathbb{R}^n)$  можно использовать следующие формулы, предложенные Хестенсом (Hestenes, 1941) для гладкого продолжения гладких функций:

$$\begin{aligned} v(x) &= u(x) \quad \text{при } x_n > 0, \\ v(x', x_n) &= \sum_1^{l+1} \lambda_\nu u\left(x', -\frac{1}{\nu} x_n\right) \quad \text{при } x_n < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где числа  $\lambda_\nu$  определяются системой уравнений

$$\sum_1^{l+1} \left(-\frac{1}{\nu}\right)^j \lambda_\nu = 1 \quad (j = 0, \dots, l). \quad (4)$$

Пусть для простоты  $\theta = 0$ . (В этой лекции в доказательствах мы ограничиваемся этим случаем.) Возьмем  $l = m$ . Если  $u \in C_0^m(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , то проверяется, что после продолжения получается функция  $v$ , принадлежащая  $C_0^m(\mathbb{R}^n)$  и при этом

$$\|v\|_{m, \mathbb{R}^n} \leq C_m \|u\|_{m, \mathbb{R}_+^n}, \quad (5)$$

где постоянная не зависит от  $u$ . Если  $\{u_l\}$  – последовательность функций из  $C_0^m(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , сходящаяся к данной функции  $u$  по норме  $\|\cdot\|_{m, \mathbb{R}_+^n}$ , то  $\{v_l\}$  сходится к некоторой функции  $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , и можно проверить, что формулы (3) сохраняются для  $v$ . Таким образом, построен ограниченный оператор продолжения функций из  $H^m(\mathbb{R}_+^n)$  (в смысле первого определения) до функций из  $H^m(\mathbb{R}^n)$ . Нормы в определениях 1 и 2 оказываются эквивалентными. Этим показано, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Эквивалентность определений 2 и 3 проверяется аналогично. Если функция принадлежит  $H^m(\mathbb{R}^n)$ , то она квадратично интегрируема по  $\mathbb{R}^n$  с производными  $D^\alpha u$ ,  $|\alpha| \leq m$ , и ее сужение на  $\mathbb{R}_+^n$  принадлежит  $H^m(\mathbb{R}_+^n)$  в смысле определения 3. Обратно, если  $u(x)$  принадлежит  $H^m(\mathbb{R}_+^n)$  в смысле определения 3, то ее продолжение до функции из  $H^m(\mathbb{R}^n)$  строится при помощи того же оператора, что и выше.

Заметим, что правую часть в (3) можно умножить на любую функцию  $\psi(x_n)$  из  $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ , равную 1 вблизи начала.

В случае ограниченной области  $\Omega$  рассуждение остается в основном таким же, но оператор продолжения строится следующим образом. Функция  $u(x)$  умножается на бесконечно гладкое разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_\nu = 1 \quad (6)$$

в  $\overline{\Omega}$ . Здесь носитель функции  $\varphi_1$  лежит внутри  $\Omega$ , а носители остальных  $\varphi_\nu$  лежат в координатных полукрестностях, в которых возможно выпрямление границы при помощи бесконечно гладкой невырожденной замены координат. Каждая из функций  $u\varphi_\nu$  продолжается через плоскую границу при помощи

описанного выше оператора. Можно позаботиться о том, чтобы продолженные функции можно было сложить и получить функцию на  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Оператор продолжения, которым мы воспользовались, на самом деле годится при всех  $s \leq l$  и достаточно гладкой границе. (Не будем останавливаться на уточнениях.) Сили (R.T. Seeley, 1964) построил его модификацию, пригодную сразу при всех  $s$  в случае бесконечно гладкой границы. Более сложный оператор продолжения строится и используется при липшицевой границе, т.е. границе, локально являющейся графиком функции, удовлетворяющей условию Липшица (см. И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, 1973).

Приведем теперь перечень важнейших свойств пространств  $H^s(\Omega)$ .

1. Пространство  $H^0(\Omega)$  совпадает с  $L_2(\Omega)$ . При  $s' > s$  пространство  $H^{s'}(\Omega)$  непрерывно и вполне непрерывно вложено в  $H^s(\Omega)$ . В случае  $\mathbb{R}_+^n$  вместо  $\Omega$  остается только утверждение о непрерывности вложения.

2. При  $s > n/2$  пространство  $H^s(\Omega)$  непрерывно вложено в пространство  $C(\overline{\Omega})$ , при  $s > k + n/2$ , где  $k$  – натуральное число, – в  $C^k(\overline{\Omega})$ . В случае  $\mathbb{R}_+^n$  вместо  $\Omega$  добавляются утверждения об ограниченности функций или ограниченности с производными до порядка  $k$  включительно.

3. При  $s > 1/2$  функции из  $H^s(\Omega)$  имеют граничные значения на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , принадлежащие  $H^{s-1/2}(\Gamma)$ , при этом оператор перехода к граничным значениям действует ограниченным образом в соответствующих соболевских пространствах. В случае  $\mathbb{R}_+^n$  вместо  $\Omega$  речь идет о граничных значениях на граничной гиперплоскости.

4. Все пространства  $H^s(\Omega)$  являются гильбертовыми. Скалярные произведения, отвечающие нормам (1) и (2), легко выписываются. Пространство, сопряженное к  $H^s(\Omega)$ , можно поэтому отождествить с этим пространством. Аналогично обстоит дело в случае  $\mathbb{R}_+^n$  вместо  $\Omega$ .

5. Оператор умножения на функцию  $a(x)$  из  $C^k(\overline{\Omega})$  ограничен в  $H^s(\Omega)$  при  $0 \leq s \leq k$ . В случае полупространства  $\mathbb{R}_+^n$  то же верно, если  $a(x)$  принадлежит  $C_b^k(\mathbb{R}_+^n)$ .

Соболевские пространства с отрицательными индексами в  $\Omega$  в  $\mathbb{R}_+^n$  тоже можно определить, но это нет смысла обсуждать наспех. Мы только наметим определение. Сначала при  $s \geq 0$  вводится подпространство  $H_0^s(\Omega)$  (в  $H^s(\Omega)$ ) – пополнение пространства  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме в  $H^s(\Omega)$ . Это подпространство совпадает с  $H^s(\Omega)$  при  $s \leq 1/2$  и не совпадает с ним при  $s > 1/2$ . Пространство  $H^{-s}(\Omega)$  определяется как сопряженное к  $H_0^s(\Omega)$  относительно формы  $(u, v)_{0, \Omega}$  (точнее, ее продолжения). Аналогично обстоит дело в случае  $\mathbb{R}_+^n$  вместо  $\Omega$ . При  $s = 1/2$  имеется другой разумный вариант определения, на этом не останавливаемся. См. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир, 1971.

Можно еще рассмотреть соболевские пространства на компактном гладком  $n$ -мерном многообразии  $M$  с  $((n-1)$ -мерным) краем  $\partial M$ . Такое многообразие допускает конечное покрытие координатными окрестностями некоторых внутренних точек и “координатными полуокрестностями” некоторых точек

края. Соболевская норма неотрицательного порядка  $s$  на таком многообразии определяется при помощи разбиения единицы, подчиненного такому покрытию. При этом в координатных окрестностях после перехода к соответствующим локальным координатам используются нормы того же порядка в  $\mathbb{R}^n$ , а в координатных полукрестностях – в  $\mathbb{R}_+^n$ . Ограниченная область с гладкой границей – частный случай. В общем случае свойства соболевского пространства  $H^s(M)$  аналогичны. Удобно также рассматривать  $M$  как часть замкнутого многообразия  $M_0$ , тогда пространство  $H^s(M)$  можно определить как состоящее из сужений на  $M$  функций из  $H^s(M_0)$ .

Другое обозначение для пространств  $H^s$  такое:  $W_2^s$ . Более общие пространства  $W_p^s$  в этих лекциях не затрагивались.

## ПЛАН ЛЕКЦИЙ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ В СЛЕДУЮЩЕМ СЕМЕСТРЕ

В прочитанных лекциях псевдодифференциальные операторы неоднократно упоминались, но подробно удалось рассказать только об обобщенных функциях и соболевских пространствах. В следующем семестре псевдодифференциальные операторы будут изучаться систематически. Ниже приводится план.

ПДО (псевдодифференциальные операторы) в  $R^n$  класса  $S^{1,0}$  и “классические” ПДО – обобщения дифференциальных операторов. Символ и главный символ. Исчисление ПДО. Эллиптичность, параметрикс эллиптического ПДО. Ограниченность в соболевских пространствах  $H^s$ . Переход от представления ПДО интегралами типа Фурье к их представлению интегралами типа свертки и описание ядер интегральных операторов, которые являются псевдодифференциальными операторами. ПДО нулевого порядка и сингулярные интегральные операторы.

ПДО на замкнутом многообразии. Эквивалентность эллиптичности и фредгольмовости в соболевских пространствах. Индекс эллиптического оператора, его гомотопическая инвариантность, аналитическая формула для индекса. Условия, достаточные для равенства индекса нулю. Эллиптичность с параметром и обратимость при больших значениях параметра. ПДО на окружности и торе: представление рядами типа Фурье.

Компактные ПДО и эллиптические ПДО с дискретным спектром. Спектральные свойства самосопряженных эллиптических ПДО ненулевого порядка на замкнутом многообразии; на окружности. Слабые возмущения самосопряженных эллиптических ПДО. ПДО, далекие от самосопряженных. Приложения к спектральным граничным задачам для классических уравнений математической физики. Функции от эллиптического ПДО  $A$ : степень  $A^s$ , экспоненты  $e^{-tA}$  и  $e^{itA}$ ,  $\zeta$ -функция, связи между ними.